Problémy s omezujícími podmínkami

Aleš Horák

E-mail: hales@fi.muni.cz
http://nlp.fi.muni.cz/uui/

Obsah:

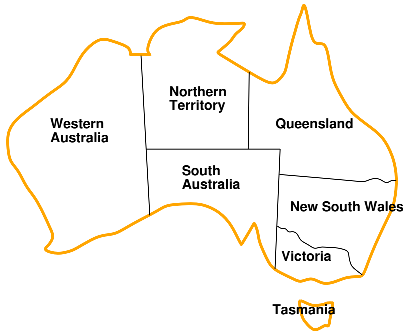
Průběžná písemná práce

- délka pro vypracování: 25 minut
- nejsou povoleny žádné materiály
- u odpovědí typu A, B, C, D, E:
  - pouze jedna odpověď je nejsprávnější ☺
  - za tuto nejsprávnější je 8 bodů
  - za žádnou odpověd je 0 bodů
  - za libovolnou jinou, případně za nejasné označení odpovědi je mínus 3 body
- celkové hodnocení 0 až 32 bodů (celkové záporné hodnocení se bere jako 0)

Problémy s omezujícími podmínkami

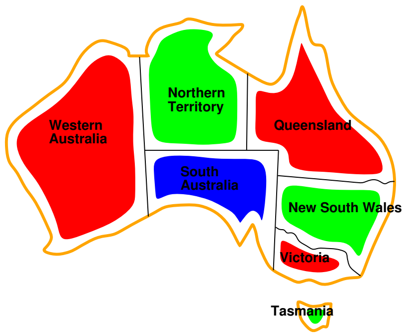
- standardní problém řešený prohledáváním stavového prostoru → stav je *"černá skříňka"* – pouze cílová podmínka a přechodová funkce
- problém s omezujícími podmínkami, *Constraint Satisfaction Problem*, CSP:
  - n-tice proměnných $X_1, X_2, \ldots, X_n$ s hodnotami z domén $D_1, D_2, \ldots, D_n$, $D_i \neq \emptyset$
  - množina omezení $C_1, C_2, \ldots, C_m$ nad proměnnými X_i
  - stav = přiřazení hodnot proměnným $\{X_i = v_i, X_j = v_j, \ldots\}$
    - konzistentní přiřazení neporušuje žádné z omezení C_i
    - úplné přiřazení zmiňuje každou proměnnou X_i
  - řešení = úplné konzistentní přiřazení hodnot proměnným
    někdy je ještě potřeba maximalizovat *cílovou funkci*
- výhody:
  - jednoduchý formální jazyk pro specifikaci problému
  - může využívat obecné heuristiky (ne jen specifické pro daný problém)

Příklad – obarvení mapy



- Proměnné WA, NT, Q, NSW, V, SA, T
- Domény $D_i = \{červená, zelená, modrá\}$
- Omezení – sousedící oblasti musí mít různou barvu
  tj. pro každé dvě sousedící: $WA \neq NT$ nebo
  $(WA, NT) \in \{(červená, zelená), (červená, modrá), (zelená, modrá), \ldots\}$

Příklad – obarvení mapy – pokrač.



- Řešení – konzistentní přiřazení všem proměnným:
  $\{WA =$ červená, $NT =$ zelená, $Q =$ červená, $NSW =$ zelená, $V =$ červená, $SA =$ modrá, $T =$ zelená$\}$

Varianty CSP podle hodnot proměnných

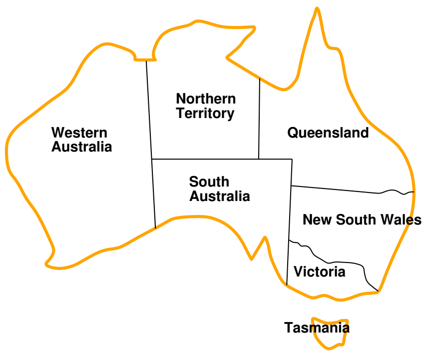
- diskrétní hodnoty proměnných – každá proměnná má jednu konkrétní hodnotu
  - konečné domény
    - např. Booleovské (včetně NP-úplných problémů splnitelnosti)
    - výčtové
  - nekonečné domény – čísla, řetězce, ...
    - např. rozvrh prací – proměnné = počáteční/koncový den každého úkolu
    - vyžaduje jazyk omezení, např. $StartJob_1 + 5 \leq StartJob_3$
    - číselné *lineární* problémy jsou řešitelné, *nelineární* obecné řešení nemají
- spojité hodnoty proměnných
  - časté u reálných problémů
  - např. počáteční/koncový čas měření na Hubbleově teleskopu (závisí na astronomických, precedenčních a technických omezeních)
  - *lineární omezení* řešené pomocí Lineárního programování (omezení = lineární (ne)rovnice tvořící konvexní oblast) → jsou řešitelné v polynomiálním čase

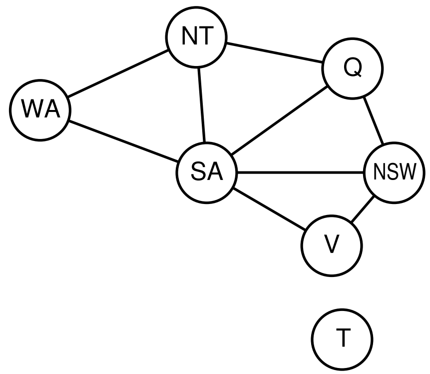
Varianty omezení

- unární omezení zahrnuje jedinou proměnnou
  např. $SA \neq$ zelená
- binární omezení zahrnují dvě proměnné
  např. $SA \neq WA$
- omezení vyššího řádu zahrnují 3 a více proměnných
  např. kryptoaritmetické omezení na sloupce u algebrogramu
- preferenční omezení (soft constraints), např. 'červená je lepší než zelená' možno reprezentovat pomocí ceny přiřazení u konkrétní hodnoty a konkrétní proměnné → hledá se optimalizované řešení vzhledem k ceně

Graf omezení

Pro binární omezení: uzly = proměnné, hrany = reprezentují jednotlivá omezení
Pro *n*-ární omezení: hypergraf: ○ uzly = proměnné, □ uzly = omezení, hrany = použití proměnné v omezení





Algoritmy pro řešení CSP využívají této grafové reprezentace omezení

CLP – Constraint Logic Programming

```
?X in +Min..+Max
?X in +Domain ...
    A in 1..3 \/8..15 \/5..9 \/100.
+VarList ins +Domain
fd_dom(?Var,?Domain)  zjištění domény proměnné
```

```
:- use_module(library(clpfd)).   % clpq, clpr

?- X in 1..5,  Y in 2..8,  X+Y #= T.
   X in 1..5,
   Y in 2..8,
   T in 3..13.
```

aritmetická omezení ...
- rel. operátory #=, #\=, #<, #=<, #>, #>=
- sum(Variables,RelOp,Suma)

výroková omezení ...
#\ negace, #/\ konjunkce, #\/ disjunkce, #<==> ekvivalence

kombinatorická omezení ...
all_distinct(List), global_cardinality(List, KeyCounts)

```
?- X in 1..5,  Y in 2..8,  X+Y #= T, labeling([],[X,Y,T]).
   T = 3,
   X = 1,
   Y = 2.
```


CLP – Constraint Logic Programming – pokrač.

```
?- X #< 4, [X,Y] ins 0..5.
   X in 0..3,  Y in 0..5.

?- X #< 4, indomain(X).
  ERROR: Arguments are not sufficiently instantiated

?- X #> 3, X #< 6, indomain(X).
   X = 4 ? ;
   X = 5 ? ;
   false

?- X in 4..sup,  X #\= 17, fd_dom(X,F).
   F = 4..16\/18..sup,
   X in 4..16\/18..sup.
```


Příklad – algebrogram

```
   S E N D
+  M O R E
----------
 M O N E Y
```

Proměnné $\{S, E, N, D, M, O, R, Y\}$

Domény $D_i = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Omezení
- $S > 0, M > 0$
- $S \neq E \neq N \neq D \neq M \neq O \neq R \neq Y$
- $1000 * S + 100 * E + 10 * N + D + 1000 * M + 100 * O + 10 * R + E = 10000 * M + 1000 * O + 100 * N + 10 * E + Y$

```
moremoney([S,E,N,D,M,O,R,Y], Type) :- [S,E,N,D,M,O,R,Y] ins 0..9,
                                      S #> 0, M #> 0,
                                      all_distinct([S,E,N,D,M,O,R,Y]),
                                      sum(S,E,N,D,M,O,R,Y),
                                      labeling(Type,  [S,E,N,D,M,O,R,Y]).

sum(S,E,N,D,M,O,R,Y) :-          1000*S + 100*E + 10*N + D
                        +        1000*M + 100*O + 10*R + E
                        #= 10000*M + 1000*O + 100*N + 10*E + Y.

?-moremoney([S,E,N,D,M,O,R,Y],[]). % Type=[] ... Type = [leftmost,step,up,all]
   S = 9, E = 5, N = 6, D = 7, M = 1, O = 0, R = 8, Y = 2 .
```


Inkrementální formulace CSP

CSP je možné převést na standardní prohledávání takto:

- stav – přiřazení hodnot proměnným
- počáteční stav – prázdné přiřazení {}
- přechodová funkce – přiřazení hodnoty libovolné dosud nenastavené proměnné tak, aby výsledné přiřazení bylo konzistentní
- cílová podmínka – aktuální přiřazení je úplné
- cena cesty – konstantní (např. 1) pro každý krok

1. platí beze změny pro všechny CSP!
2. prohledávácí strom dosahuje hloubky n (počet proměnných) a řešení se nachází v této hloubce ($d = n$) ⇒ je vhodné použít prohledávání do hloubky

Prohledávání s navracením

- přiřazení proměnným jsou komutativní
  tj. [1. WA = červená,   2. NT = zelená] je totéž jako
  [1. NT = zelená,   2. WA = červená]
- stačí uvažovat pouze přiřazení jediné proměnné v každém kroku ⇒ počet listů d^n
- prohledávání do hloubky pro CSP – tzv. prohledávání s navracením (*backtracking search*)
- prohledávání s navracením je základní neinformovaná strategie pro řešení problémů s omezujícími podmínkami
- schopný vyřešit např. problém n-dam pro $n \approx 25$ (naivní řešení 10^{69}, vlastní sloupce 10^{25})

Příklad – problém N dam

```
queens(N,L,Type):-  length(L,N),              1. definice proměnných a domén
                    L ins 1..N,
                    constr_all(L),            2. definice omezení
                    labeling(Type,L).         3. hledání řešení
constr_all([]).
constr_all([X|Xs]):-   constr_between(X,Xs,1),  constr_all(Xs).

constr_between(_,[],_).
constr_between(X,[Y|Ys],N):-
    no_threat(X,Y,N),
    N1 is N+1,
    constr_between(X,Ys,N1).

no_threat(X,Y,J):-  X #\= Y, X+J #\= Y, X−J #\= Y.

?− queens(4, L, [ff]).
    L = [2,4,1,3]  ? ;
    L = [3,1,4,2]  ? ;
    false
```


Ovlivnění efektivity prohledávání s navracením

Obecné metody ovlivnění efektivity:
– Která proměnná dostane hodnotu v tomto kroku?
– V jakém pořadí zkoušet přiřazení hodnot konkrétní proměnné?
– Můžeme předčasně detekovat nutný neúspěch v dalších krocích?

používané strategie:

- nejomezenější proměnná → vybrat proměnnou s nejméně možnými hodnotami
- nejvíce omezující proměnná → vybrat proměnnou s nejvíce omezeními na zbývající proměnné
- nejméně omezující hodnota → pro danou proměnnou – hodnota, která zruší nejmíň hodnot zbývajících proměnných
- dopředná kontrola → udržovat seznam možných hodnot pro zbývající proměnné
- propagace omezení → navíc kontrolovat možné nekonzistence mezi zbývajícími proměnnými

Ovlivnění efektivity v CLP

V Prologu (CLP) možnosti ovlivnění efektivity – **labeling(Typ, ...)**:

```
?− constraints(Vars,Cost),
   labeling([ff,bisect,down,min(Cost)],Vars).
```

- výběr proměnné – **leftmost**, **min**, **max**, **ff**, ...
- dělení domény – **step**, **enum**, **bisect**
- prohledávání domény – **up**, **down**
- uspořádání řešení – bez uspořádání nebo **min(X)**, **max(X)**, ...

Systémy pro řešení omezujících podmínek

- Prolog – SWI, CHIP, ECLiPSe, SICStus Prolog, Prolog IV, GNU Prolog, IF/Prolog
- C/C++ – CHIP++, ILOG Solver, Gecode
- Java – JCK, JCL, Koalog
- LISP – Screamer
- Python – logilab-constraint `www.logilab.org/852`
- Mozart – `www.mozart-oz.org`, jazyk Oz