

# Heuristiky, best-first search, A\* search

Aleš Horák

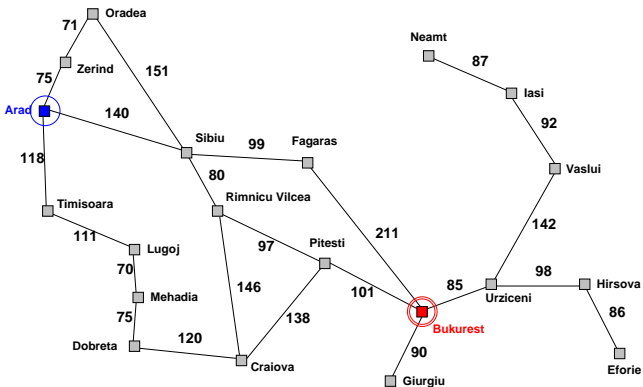
E-mail: [hales@fi.muni.cz](mailto:hales@fi.muni.cz)  
<http://nlp.fi.muni.cz/uui/>

Obsah:

- ▶ Informované prohledávání stavového prostoru
- ▶ Jak najít dobrou heuristiku?

## Příklad – cesta na mapě

Najdi cestu z města **Arad** do města **Bukurest**



## Příklad – schéma rumunských měst

Města:

Arad

Bukurest

Craiova

Dobreta

Eforie

Fagaras

Giurgiu

Hirsova

Iasi

Lugoj

Mehadia

Neamt

...

Cesty:

Arad ↔ Timisoara 118

Arad ↔ Sibiu 140

Arad ↔ Zerind 75

Timisoara ↔ Lugoj 111

Sibiu ↔ Fagaras 99

Sibiu ↔ Rimnicu Vilcea 80

Zerind ↔ Oradea 71

... ↔ ...

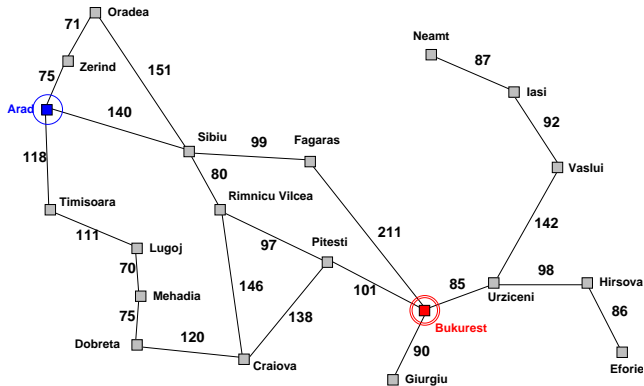
Giurgiu ↔ Bukurest 90

Pitesti ↔ Bukurest 101

Fagaras ↔ Bukurest 211

Urziceni ↔ Bukurest 85

## Příklad – schéma rumunských měst



Arad	366
Bukurest	0
Craiova	160
Dobreta	242
Eforie	161
Fagaras	178
Giurgiu	77
Hirsova	151
Iasi	226
Lugoj	244
Mehadia	241
Neamt	234
Oradea	380
Pitesti	98
Rimnicu Vilcea	193
Sibiu	253
Timisoara	329
Urziceni	80
Vaslui	199
Zerind	374

## Příklad – cesta na mapě

### Neinformované prohledávání:

- ▶ DFS, BFS a varianty
- ▶ nemá (téměř) žádné informace o pozici cíle – **slepé prohledávání**
- ▶ zná pouze:
  - počáteční/cílový stav
  - přechodovou funkci

### Informované prohledávání:

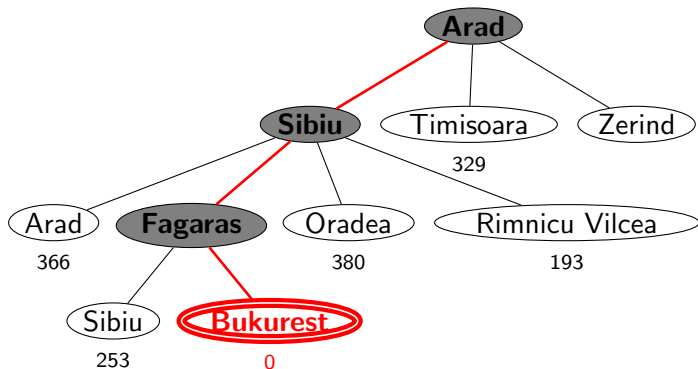
má navíc informaci o (odhadu) blízkosti stavu k cílovému stavu – **heuristická funkce** (heuristika)

# Heuristické hledání nejlepší cesty

- ▶ Best-first Search
- ▶ použití **ohodnocovací funkce**  $f(n)$  pro každý uzel – výpočet **přínosu** daného uzlu
- ▶ udržujeme seznam uzlů **uspořádaný** (vzestupně) vzhledem k  $f(n)$
- ▶ použití **heuristické funkce**  $h(n)$  pro každý uzel – **odhad vzdálenosti** daného uzlu (stavu) od cíle
- ▶ čím *menší*  $h(n)$ , tím blíže k cíli,  $h(\text{Goal}) = 0$ .
- ▶ nejjednodušší varianta – **hladové heuristické hledání**, *Greedy best-first search*  
 $f(n) = h(n)$

## Hladové heuristické hledání – příklad

Hledání cesty z města *Arad* do města *Bukurest*  
ohodnocovací funkce  $f(n) = h(n) = h_{\text{vzd. Buk}}(n)$ , **přímá vzdálenost** z  $n$  do Bukuresti



## Hladové heuristické hledání – vlastnosti

- ▶ expanduje vždy uzel, který **se zdá** nejbližší k cíli
- ▶ cesta nalezená v příkladu ( $g(\text{Arad} \rightarrow \text{Sibiu} \rightarrow \text{Fagaras} \rightarrow \text{Bukurest}) = 450$ ) je sice úspěšná, ale **není optimální**  
( $g(\text{Arad} \rightarrow \text{Sibiu} \rightarrow \text{RimnicuVilcea} \rightarrow \text{Pitesti} \rightarrow \text{Bukurest}) = 418$ )
- ▶ *úplnost*                      obecně **není** úplný (nekonečný prostor, cykly)  
*optimálnost*                      **není** optimální  
*časová složitost*                 $O(b^m)$ , hodně záleží na  $h$   
*prostorová složitost*          $O(b^m)$ , každý uzel v paměti



## Hledání nejlepší cesty – algoritmus A\*

- ▶ některé zdroje označují tuto variantu jako **Best-first Search**
- ▶ **ohodnocovací funkce** – kombinace  $g(n)$  a  $h(n)$ :

$$f(n) = g(n) + h(n)$$

$g(n)$  je **cena cesty** do  $n$

$h(n)$  je **odhad ceny** cesty z  $n$  do cíle

$f(n)$  je **odhad** ceny **nejlevnější cesty**, která vede přes  $n$

- ▶ A\* algoritmus vyžaduje tzv. **přípustnou** (*admissible*) heuristiku:

$$0 \leq h(n) \leq h^*(n), \text{ kde } h^*(n) \text{ je skutečná cena cesty z } n \text{ do cíle}$$

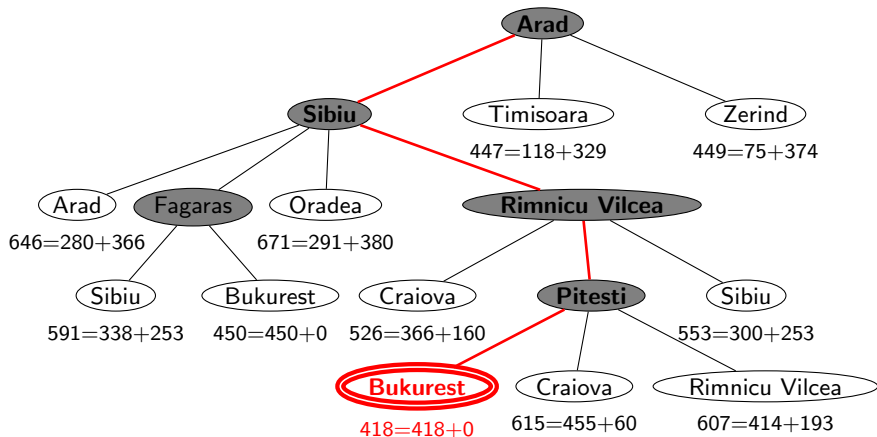
tj. odhad se volí vždycky **kratší** nebo roven ceně libovolné **možné** cesty do cíle

Např. **přímá vzdálenost**  $h_{\text{vzd\_Buk}}$  nikdy není delší než (jakákoliv) cesta

## Heuristické hledání A\* – příklad

Hledání cesty z města *Arad* do města *Bukurest*

ohodnocovací funkce  $f(n) = g(n) + h(n) = g(n) + h_{\text{vzd\_Buk}}(n)$



## Hledání nejlepší cesty A\* – vlastnosti

► expanduje uzly podle  $f(n) = g(n) + h(n)$

A\* expanduje **všechny** uzly s  $f(n) < C^*$

A\* expanduje **některé** uzly s  $f(n) = C^*$

A\* **neexpanduje žádné** uzly s  $f(n) > C^*$

► *úplnost* je úplný (pokud [počet uzlů s  $f < C^*$ ]  $\neq \infty$ , tedy cena  $\geq \epsilon$  a  $b$  konečné)

*optimálnost* je optimální

*časová složitost*  $O((b^*)^d)$ , exponenciální v délce řešení  $d$

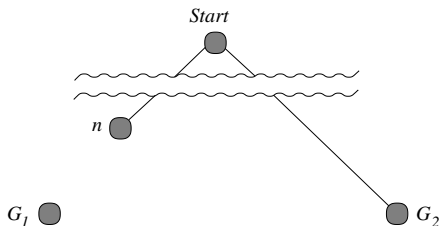
$b^*$  ... tzv. *efektivní faktor větvení*, viz dále

*prostorová složitost*  $O((b^*)^d)$ , každý uzel v paměti

Problém s prostorovou složitostí řeší algoritmy jako *IDA\**, *RBFS*

## Důkaz optimálnosti algoritmu A\*

- ▶ předpokládejme, že byl vygenerován nějaký **suboptimální cíl**  $G_2$  a je uložen ve frontě.
- ▶ dále necht'  $n$  je **neexpandovaný** uzel na nejkratší cestě k **optimálnímu cíli**  $G_1$  (tj. **chybně neexpandovaný** uzel ve správném řešení)



Pak

$$\begin{aligned}
 f(G_2) &= g(G_2) \quad \text{protože } h(G_2) = 0 \\
 &> g(G_1) \quad \text{protože } G_2 \text{ je suboptimální} \\
 &\geq f(n) \quad \text{protože } h \text{ je přípustná}
 \end{aligned}$$

tedy  $f(G_2) > f(n) \Rightarrow A^*$  nikdy nevybere  $G_2$  pro expanzi dřív než expanduje  $n \rightarrow$  **spor** s předpokladem, že  $n$  je *neexpandovaný uzel* □

# Hledání nejlepší cesty – algoritmus A\*

reprezentace uzlů:

▶ Prolog: **I(N,F/G)** ... Python: *trojice* **(n, f, g)** ...

**listový uzel N**,  $F = f(N) = G + h(N)$ ,  $G = g(N)$

▶ Prolog: **t(N,F/G,Subs)** ... Python: *čtveřice* **(n, f, g, subs)** ...

**podstrom** s kořenem **N**, **Subs** podstromy seřazené podle  $f$ ,  $G = g(N)$  a  $F = f$ -hodnota nejnadějnějšího následníka  $N$

*# horní závora pro cenu nejlepší cesty*

`biggest = 9999`

`def best_search(start):`

`for _, solved, sol in expand(Nil, (start, 0, 0), biggest):`

`if solved == "yes":`

`yield sol`

*# pokrač. →*

`expand(path,tree,bound) → (tree1, solved, sol)`  
**path** – cesta mezi kořenem a **tree**  
**tree** – prohledávaný podstrom  
**bound** –  $f$ -limita pro expandování **Tr**  
 vrací *trojici*:  
**tree1** – **tree** expandovaný až po **bound**  
**solved** – 'yes', 'no', 'never'  
**sol** – cesta z kořene do cílového uzlu

odpovídá `return` pro *generátorovou funkci*

## Hledání nejlepší cesty – algoritmus A\* – pokrač.

```

def expand(path, tree, bound):
    if len(tree) == 3: # listový uzel
        node, f, g = tree
        if is_goal(node): yield (None, "yes", (f, Cons(node, path)))
        if f <= bound:
            succ = Nil
            for m, c in move_anyYC(node):
                if not member(m, path): succ = Cons((m, c), succ)
            if succ == Nil: yield (None, "never", None)
            else:
                trees = succlist(g, succ)
                f1 = bestf(trees)
                for tree1, solved1, sol1 in expand(path, (node, f1, g, trees), bound):
                    yield (tree1, solved1, sol1)
        elif f > bound: yield (tree, "no", None)
    else: # stromový uzel
        node, f, g, trees = tree
        if trees == Nil: yield (None, "never", None)
        else:
            if f <= bound:
                bound1 = min(bound, bestf(trees.tail))
                for t1, solved1, sol1 in expand(Cons(node, path), trees.head, bound1):
                    for tree1, solved1, sol1 in continue_(path, (node, f, g, Cons(t1, trees.tail)),
                                                         bound, solved1, sol1):
                        yield (tree1, solved1, sol1)
            elif f > bound: yield (tree, "no", None)

```

vrací trojici: (tree1, solved, sol)

succlist setřídí seznam listů podle f-hodnot

continue – volba způsobu pokračování podle výsledků expand

# Hledání nejlepší cesty – algoritmus A\* – pokrač.

```
def continue_(path, tree, bound, subtr_solved, sol):  
    node, _, g, trees = tree  
    if subtr_solved == "yes":  
        yield (None, "yes", sol)  
    elif subtr_solved == "no":  
        nts = insert(trees.head, trees.tail)  
        f1 = bestf(nts)  
        for tree1, solved, sol in expand(path, (node, f1, g, nts), bound):  
            yield (tree1, solved, sol)  
    elif subtr_solved == "never":  
        f1 = bestf(trees.tail)  
        for tree1, solved, sol in expand(path, (node, f1, g, trees.tail), bound):  
            yield (tree1, solved, sol)
```

**continue** – volba způsobu pokračování podle výsledků **expand**

# pokrač. →

## Hledání nejlepší cesty – algoritmus A\* – pokrač.

```
def succlist(g0, succ):
```

```
  if succ == Nil: return Nil
```

```
  n, c = succ.head
```

```
  g = g0 + c
```

```
  f_ = g + h(n)
```

```
  ts1 = succlist(g0, succ.tail)
```

```
  ts = insert((n, f_, g), ts1)
```

```
  return ts
```

**succlist(g0, succ)** setřídí seznam listů podle  $f$ -hodnot  
vrací setříděný seznam

```
def f(tree):
```

```
  if len(tree) == 3: # listový uzel
```

```
    → f_, _ = tree
```

```
  else: # stromový uzel
```

```
    → f_, _, _ = tree
```

```
  return f_
```

“vytáhne”  $f$  ze struktury

nejlepší  $f$ -hodnota ze seznamu stromů

```
def bestf(trees):
```

```
  if trees == Nil: return biggest
```

```
  return f(trees.head)
```

```
def insert(t, ts):
```

```
  if f(t) <= bestf(ts): return Cons(t, ts)
```

```
  return Cons(ts.head, insert(t, ts.tail))
```

vloží  $t$  do seznamu stromů  $ts$  podle  $f$



# Hledání nejlepší cesty – algoritmus A\* – heapq

řešení pomocí modulu `heapq` – implementace **prioritní fronty**

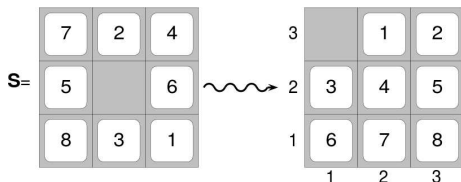
```
import heapq
```

```
def best_search(start):  
    heap = [(0, 0, start, Nil)]  
    while True:  
        try:  
            f, g, node, path = heapq.heappop(heap)  
        except IndexError: # fronta je prázdná  
            break  
        path1 = Cons(node, path)  
        if is_goal(node):  
            yield (f, path1)  
        if f <= biggest:  
            for m, c in move_anyYC(node):  
                if not member(m, path1):  
                    heapq.heappush(heap, (g+c+h(m), g+c, m, path1))
```

## Příklad – řešení posunovačky

konfigurace = seznam souřadnic **X/Y**: [pozice<sub>díry</sub>, pozice<sub>kámen č.1</sub>, ...]

```
start([2/2, 3/1, 2/3, 2/1, 3/3,
      1/2, 3/2, 1/3, 1/1]).
goal([1/3, 2/3, 3/3, 1/2, 2/2,
      3/2, 1/1, 2/1, 3/1]).
```



**move(+Uzel, -NaslUzel, -Cena)** pomocí pohybů mezery (cena vždy 1)

```
move([XB/YB | Numbers], [XL/YB | NewNumbers], 1) :- % doleva
    XB>1, XL is XB - 1, replace(XL/YB, XB/YB, Numbers, NewNumbers).
move([XB/YB | Numbers], [XR/YB | NewNumbers], 1) :- % doprava
    XB<3, XR is XB + 1, replace(XR/YB, XB/YB, Numbers, NewNumbers).
move([XB/YB | Numbers], [XB/YD | NewNumbers], 1) :- % dolů
    YB>1, YD is YB - 1, replace(XB/YD, XB/YB, Numbers, NewNumbers).
move([XB/YB | Numbers], [XB/YU | NewNumbers], 1) :- % nahoru
    YB<3, YU is YB + 1, replace(XB/YU, XB/YB, Numbers, NewNumbers).
```

*% replace(+Co, +Cim, +Seznam, -NovySeznam)*

```
replace(Co,Cim,[Co|T],[Cim|T]):- !.
```

```
replace(Co,Cim,[H|T1],[H|T2]) :- replace(Co,Cim,T1,T2).
```

## Příklad – řešení posunovačky pokrač.

### Volba přípustné heuristické funkce $h$ :

- ▶  $h_1(n)$  = počet dlaždiček, které nejsou na svém místě     $h_1(\mathbf{S}) = 8$
- ▶  $h_2(n)$  = součet **manhattanských vzdáleností** dlaždic od svých správných pozic     $h_2(\mathbf{S}) = 3_7 + 1_2 + 2_4 + 2_5 + 3_6 + 2_8 + 2_3 + 3_1 = 18$

$h_1$  i  $h_2$  jsou přípustné ...  $h^*(S) = 26$

:- **start** (Start), **bestsearch** (Start, Solution),  
**reverse** (Solution, RSolution), **writelist** (RSolution).

1: [2/2, 3/1, 2/3, 2/1, 3/3, 1/2, 3/2, 1/3, 1/1]

2: [1/2, 3/1, 2/3, 2/1, 3/3, 2/2, 3/2, 1/3, 1/1]

...

26: [1/2, 2/3, 3/3, 1/3, 2/2, 3/2, 1/1, 2/1, 3/1]

27: [1/3, 2/3, 3/3, 1/2, 2/2, 3/2, 1/1, 2/1, 3/1]

## Jak najít přípustnou heuristickou funkci?

- ▶ je možné najít obecné pravidlo, jak objevit heuristiku  $h_1$  nebo  $h_2$ ?
- ▶  $h_1$  i  $h_2$  jsou délky cest pro **zjednodušené verze** problému Posunovačka:
  - při **přenášení** dlaždice kamkoliv –  $h_1$ =počet kroků nejkratšího řešení
  - při **posouvání** dlaždice kamkoliv o **1 pole** (i na plné) –  $h_2$ =počet kroků nejkratšího řešení
- ▶ **relaxovaný problém** – méně omezení na akce než původní problém

*Cena optimálního řešení relaxovaného problému je přípustná heuristika pro původní problém.*

**optimální** řešení **původního** problému = **řešení** **relaxovaného** problému

Posunovačka a relaxovaná posunovačka:

- ▶ dlaždice se může přesunout z A na B  $\Leftrightarrow$  A sousedí s B  $\wedge$  B je prázdná
- ▶ (a) dlaždice se může přesunout z A na B  $\Leftrightarrow$  A sousedí s B ...  $h_2$
- ▶ (b) dlaždice se může přesunout z A na B  $\Leftrightarrow$  B je prázdná ... Gaschnigova  $h$ .
- ▶ (c) dlaždice se může přesunout z A na B .....  $h_1$

## Určení kvality heuristiky

**efektivní faktor větvení  $b^*$**  –  $N$ ... počet vygenerovaných uzlů,  $d$ ... hloubka řešení, idealizovaný strom s  $N + 1$  uzly má faktor větvení  $b^*$  (reálné číslo):

$$N + 1 = 1 + b^* + (b^*)^2 + \dots + (b^*)^d$$

např.: když A\* najde řešení po 52 uzlech v hloubce 5 ...  $b^* = 1.92$   
heuristika je tím **lepší**, čím **blíže** je  $b^*$  **hodnotě 1**.

👉 **měření  $b^*$**  na množině testovacích sad – dobrá představa o **přínosu heuristiky**

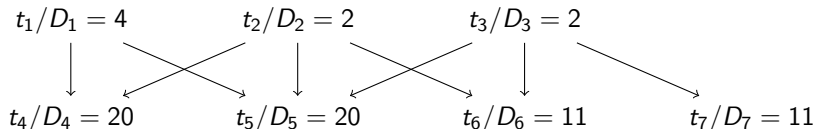
### 8-posunovačka

$d$	Průměrný počet uzlů			Efektivní faktor větvení $b^*$		
	IDS	$A^*(h_1)$	$A^*(h_2)$	IDS	$A^*(h_1)$	$A^*(h_2)$
2	10	6	6	2.45	1.79	1.79
6	680	20	18	2.73	1.34	1.30
10	47127	93	39	2.79	1.38	1.22
12	3644035	227	73	2.78	1.42	1.24
18	–	3056	363	–	1.46	1.26
24	–	39135	1641	–	1.48	1.26

$h_2$  **dominuje**  $h_1$  ( $\forall n : h_2(n) \geq h_1(n)$ ) ...  $h_2$  je **lepší** (nebo stejná) než  $h_1$  ve všech případech

## Příklad – rozvrh práce procesorů

- ▶ úlohy  $t_i$  s potřebným časem na zpracování  $D_i$  (např.:  $i = 1, \dots, 7$ )
- ▶  $m$  procesorů (např.:  $m = 3$ )
- ▶ relace **precedence** mezi úlohami – které úlohy mohou začít až po skončení dané úlohy



- ▶ problém: najít **rozvrh práce** pro každý procesor s minimalizací celkového času

	0	2	4	13	24	33
CPU <sub>1</sub>		$t_3$	$\leftarrow t_6 \Rightarrow$	$\leftarrow t_5 \Rightarrow$		
CPU <sub>2</sub>		$t_2$	$\leftarrow t_7 \Rightarrow$	.....		
CPU <sub>3</sub>		$t_1$	$\Rightarrow$	$\leftarrow t_4 \Rightarrow$	.....	

	0	2	4	13	24	33
CPU <sub>1</sub>		$t_3$	$\leftarrow t_6 \Rightarrow$	$\leftarrow t_7 \Rightarrow$	.....	
CPU <sub>2</sub>		$t_2$	$\leftarrow$	$t_5$	$\Rightarrow$	.....
CPU <sub>3</sub>		$t_1$	$\Rightarrow$	$\leftarrow t_4 \Rightarrow$	.....	

## Příklad – rozvrh práce procesorů – pokrač.

- ▶ stavy: **nezařazené\_úlohy\*běžící\_úlohy\*čas\_ukončení**  
 např.: **[WaitingT1/D1,WaitingT2/D2,...]\*[Task1/F1,Task2/F2,Task3/F3]\*FinTime**  
**běžící\_úlohy** udržujeme setříděné  $F1 \leq F2 \leq F3$
- ▶ přechodová funkce **move(+Uzel, -NasUzel, -Cena)**:

```

move(Tasks1*[_/F|Active1]*Fin1, Tasks2*Active2*Fin2, Cost) :-
  del1(Task/D,Tasks1,Tasks2),
  \+ (member(T/_ ,Tasks2),before(T,Task)), % kontrola precedence v čekajících
  \+ (member(T1/F1,Active1),F<F1,before(T1,Task)), % a v zařazených úlohách
  Time is F+D, insert(Task/Time,Active1,Active2,Fin1,Fin2), Cost is Fin2-Fin1.
move(Tasks*[_/F|Active1]*Fin,Tasks*Active2*Fin,0) :- insertidle(F,Active1,Active2).
  
```

```

before(T1,T2) :- precedence(T1,T2).
before(T1,T2) :- precedence(T,T2),before(T1,T).
  
```

**before( +Task1, +Task2)**  
 tranzitivní obal relace **precedence**

```

insert(S/A,[T/B|L],[S/A,T/B|L],F,F) :- A<B,!.
insert(S/A,[T/B|L],[T/B|L1],F1,F2) :- insert(S/A,L,L1,F1,F2).
insert(S/A,[],[S/A],-,A).
  
```

```

insertidle(A,[T/B|L],[idle/B,T/B|L]) :- A<B,!.
insertidle(A,[T/B|L],[T/B|L1]) :- insertidle(A,L,L1).
  
```

```

goal([],*_*_.).
  
```

## Příklad – rozvrh práce procesorů – pokrač.

- ▶ počáteční uzel:

`start([t1/4, t2/2, t3/2, t4/20, t5/20, t6/11, t7/11]*[idle/0, idle/0, idle/0]*0).`

- ▶ heuristika

optimální (nedosažitelný) čas:

$$\mathbf{Finall} = \frac{\sum_i D_i + \sum_j F_j}{m}$$

skutečný čas výpočtu:

$$\mathbf{Fin} = \max(F_j)$$

heuristická funkce  $h$ :

$$\mathbf{H} = \begin{cases} \mathbf{Finall} - \mathbf{Fin}, & \text{když } \mathbf{Finall} > \mathbf{Fin} \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

`h(Tasks * Processors * Fin, H) :-  
totaltime(Tasks, Tottime),  
sumnum(Processors, Ftime, N),  
Finall is (Tottime + Ftime)/N,  
(Finall > Fin, !, H is Finall - Fin  
; H = 0).`

`totaltime([], 0).  
totaltime([_/D | Tasks], T) :-  
totaltime(Tasks, T1), T is T1 + D.`

`sumnum([], 0, 0).  
sumnum([_/T | Procs], FT, N) :-  
sumnum(Procs, FT1, N1),  
N is N1 + 1, FT is FT1 + T.`

`precedence(t1, t4). precedence(t1, t5).`

...



## Příklad – rozvrh práce procesorů – pokrač.

```
:- start(Start), write('Pocatecni stav:'), write(Start), nl,
   bestsearch(Start, Solution),
   write('Nalezene reseni:'), nl,
   reverse(Solution,RSolution), writelist(RSolution).
```

Pocatecni stav: [t1/4,t2/2,t3/2,t4/20,t5/20,t6/11,t7/11]\*[idle/0,idle/0,idle/0]\*0

Nalezene reseni:

1: [t1/4,t2/2,t3/2,t4/20,t5/20,t6/11,t7/11]\*[idle/0,idle/0,idle/0]\*0

2: [t1/4,t2/2,t4/20,t5/20,t6/11,t7/11]\*[idle/0,idle/0,t3/2]\*2

3: [t1/4,t4/20,t5/20,t6/11,t7/11]\*[idle/0,t2/2,t3/2]\*2

4: [t4/20,t5/20,t6/11,t7/11]\*[t2/2,t3/2,t1/4]\*4

5: [t4/20,t5/20,t6/11]\*[t3/2,t1/4,t7/13]\*13

6: [t4/20,t5/20,t6/11]\*[idle/4,t1/4,t7/13]\*13

7: [t5/20,t6/11]\*[t1/4,t7/13,t4/24]\*24

8: [t6/11]\*[t7/13,t5/24,t4/24]\*24

9: []\*[t6/24,t5/24,t4/24]\*24