Heuristiky, best-first search, A* search

Aleš Horák

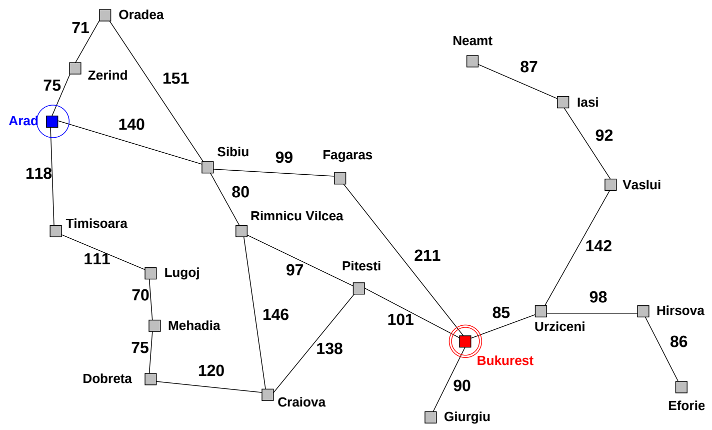
E-mail: hales@fi.muni.cz
http://nlp.fi.muni.cz/uui/

Obsah:

- Informované prohledávání stavového prostoru
- Jak najít dobrou heuristiku?

Příklad – cesta na mapě

Najdi cestu z města Arad do města Bukurest



Příklad – schéma rumunských měst

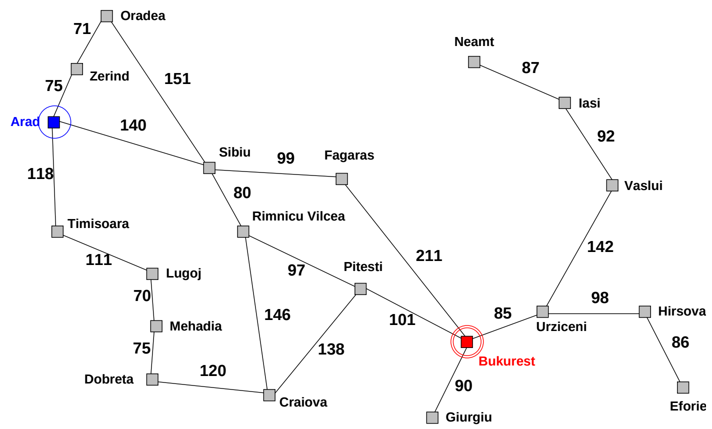
Města:

- Arad
- Bukurest
- Craiova
- Dobreta
- Eforie
- Fagaras
- Giurgiu
- Hirsova
- Iasi
- Lugoj
- Mehadia
- Neamt
- ...

Cesty:

Arad	↔	Timisoara	118
Arad	↔	Sibiu	140
Arad	↔	Zerind	75
Timisoara	↔	Lugoj	111
Sibiu	↔	Fagaras	99
Sibiu	↔	Rimnicu Vilcea	80
Zerind	↔	Oradea	71
...	↔	...	
Giurgiu	↔	Bukurest	90
Pitesti	↔	Bukurest	101
Fagaras	↔	Bukurest	211
Urziceni	↔	Bukurest	85

Příklad – schéma rumunských měst



Arad	366
Bukurest	0
Craiova	160
Dobreta	242
Eforie	161
Fagaras	178
Giurgiu	77
Hirsova	151
Iasi	226
Lugoj	244
Mehadia	241
Neamt	234
Oradea	380
Pitesti	98
Rimnicu Vilcea	193
Sibiu	253
Timisoara	329
Urziceni	80
Vaslui	199
Zerind	374

Příklad – cesta na mapě

Neinformované prohledávání:

- DFS, BFS a varianty
- nemá (téměř) žádné informace o pozici cíle – slepé prohledávání
- zná pouze:
  - počáteční/cílový stav
  - přechodovou funkci

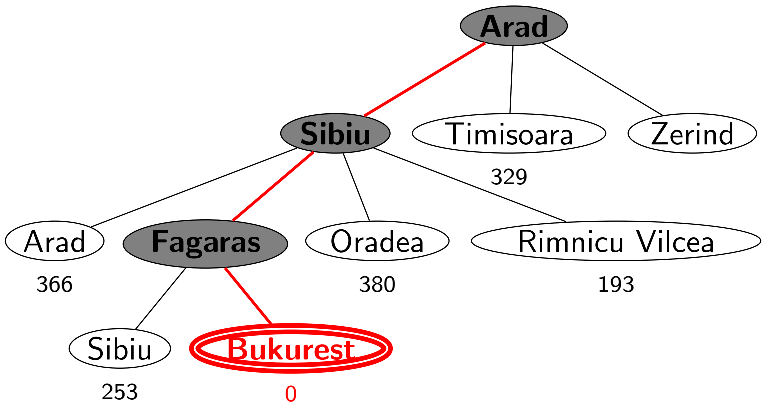
Informované prohledávání:
má navíc informaci o (odhadu) blízkosti stavu k cílovému stavu – heuristická funkce (heuristika)

Heuristické hledání nejlepší cesty

- Best-first Search
- použití ohodnocovací funkce $f(n)$ pro každý uzel – výpočet přínosu daného uzlu
- udržujeme seznam uzlů uspořádaný (*vzestupně*) vzhledem k $f(n)$
- použití heuristické funkce $h(n)$ pro každý uzel – odhad vzdálenosti daného uzlu (stavu) od cíle
- čím *menší* $h(n)$, tím blíže k cíli, $h(\text{Goal}) = 0$.
- nejjednodušší varianta – hladové heuristické hledání, *Greedy best-first search*
  $f(n) = h(n)$

Hladové heuristické hledání – příklad

Hledání cesty z města *Arad* do města *Bukurest*
ohodnocovací funkce $f(n) = h(n) = h_{\text{vzd\_Buk}}(n)$, přímá vzdálenost z n do Bukuresti



Hladové heuristické hledání – vlastnosti

- expanduje vždy uzel, který se zdá nejblíže k cíli
- cesta nalezená v příkladu ($g(\text{Arad} \to \text{Sibiu} \to \text{Fagaras} \to \text{Bukurest}) = 450$) je sice úspěšná, ale není optimální
  ($g(\text{Arad} \to \text{Sibiu} \to \text{RimnicuVilcea} \to \text{Pitesti} \to \text{Bukurest}) = 418$)
úplnost	obecně není úplný (nekonečný prostor, cykly)
optimálnost	není optimální
časová složitost	$O(b^m)$, hodně záleží na h
prostorová složitost	$O(b^m)$, každý uzel v paměti

Hledání nejlepší cesty – algoritmus A*

- některé zdroje označují tuto variantu jako Best-first Search
- ohodnocovací funkce – kombinace $g(n)$ a $h(n)$:

$$f(n) = g(n) + h(n)$$

$g(n)$ je cena cesty do n
$h(n)$ je odhad ceny cesty z n do cíle
$f(n)$ je odhad ceny nejlevnější cesty, která vede přes n

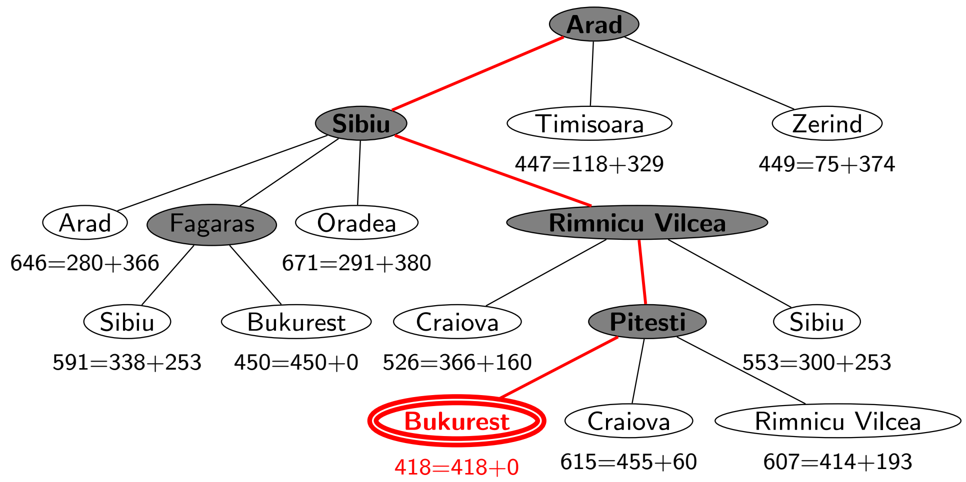
- A* algoritmus vyžaduje tzv. přípustnou (*admissible*) heuristiku:

$$0 \le h(n) \le h^*(n), \text{ kde } h^*(n) \text{ je skutečná cena cesty z } n \text{ do cíle}$$

tj. odhad se volí vždycky kratší nebo roven ceně libovolné možné cesty do cíle
Např. přímá vzdálenost $h_{\text{vzd\_Buk}}$ nikdy není delší než (jakákoliv) cesta

Heuristické hledání A* – příklad

Hledání cesty z města *Arad* do města *Bukurest*
ohodnocovací funkce $f(n) = g(n) + h(n) = g(n) + h_{\text{vzd\_Buk}}(n)$



Hledání nejlepší cesty A* – vlastnosti

- expanduje uzly podle $f(n) = g(n) + h(n)$

  A* expanduje všechny uzly s $f(n) < C^*$
  A* expanduje některé uzly s $f(n) = C^*$
  A* neexpanduje žádné uzly s $f(n) > C^*$

- *úplnost* je úplný (pokud [počet uzlů s $f < C^*$] $\neq \infty$, tedy cena $\ge \epsilon$ a b konečné)

  optimálnost je optimální

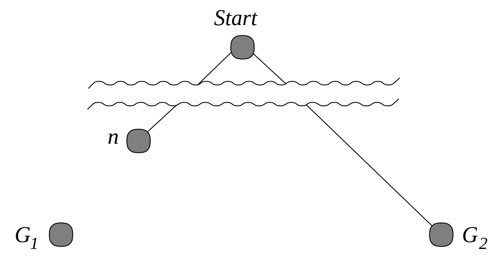
  časová složitost $O((b^*)^d)$, exponenciální v délce řešení d
  b^* ... tzv. *efektivní faktor větvení*, viz dále

  prostorová složitost $O((b^*)^d)$, každý uzel v paměti

Problém s prostorovou složitostí řeší algoritmy jako *IDA**, *RBFS*

Důkaz optimálnosti algoritmu A*

- předpokládejme, že byl vygenerován nějaký suboptimální cíl G_2 a je uložen ve frontě.
- dále nechť n je neexpandovaný uzel na nejkratší cestě k optimálnímu cíli G_1 (tj. chybně neexpandovaný uzel ve správném řešení)



Pak

$$\begin{array}{rcll} f(G_2) & = & g(G_2) & \text{protože } h(G_2) = 0 \\ & > & g(G_1) & \text{protože } G_2 \text{ je suboptimální} \\ & \ge & f(n) & \text{protože } h \text{ je přípustná} \end{array}$$

tedy $f(G_2) > f(n)$ $\Rightarrow$ A* nikdy nevybere G_2 pro expanzi dřív než expanduje n $\rightarrow$ spor s předpokladem, že n je *neexpandovaný uzel* $\square$

Hledání nejlepší cesty – algoritmus A*

reprezentace uzlů:

- Prolog: **l(N,F/G)** ... Python: *trojice* **(n, f, g)** ...
  listový uzel **N**, **F** $= f(N) =$ **G** $+ h(N)$, **G** $= g(N)$
- Prolog: **t(N,F/G,Subs)** ... Python: *čtveřice* **(n, f, g, subs)** ...
  podstrom s kořenem **N**, **Subs** podstromy seřazené podle f, **G** $= g(N)$ a
  F $=$ f-hodnota nejnadějnějšího následníka N

expand(path,tree,bound) → **(tree1, solved, sol)**
path – cesta mezi kořenem a **tree**
tree – prohledávaný podstrom
bound – f-limita pro expandování **Tr**
vrací *trojici*:
tree1 – **tree** expandovaný až po **bound**
solved – **'yes'**, **'no'**, **'never'**
sol – cesta z kořene do cílového uzlu

```
# horní závora pro cenu nejlepší cesty
biggest = 9999

def best_search(start):
    for _, solved, sol in expand(Nil, (start, 0, 0), biggest):
        if solved == "yes":
            yield sol

# pokrač. →
```

odpovídá **return** pro *generátorovou funkci*

Hledání nejlepší cesty – algoritmus A* – pokrač.

```
def expand(path, tree, bound):
    if len(tree) == 3: # listový uzel
        node, f, g = tree
        if is_goal(node): yield (None, "yes", (f, Cons(node, path)))
        if f <= bound:
            succ = Nil
            for m, c in move_anyYC(node):
                if not member(m, path): succ = Cons((m, c), succ)
            if succ == Nil: yield (None, "never", None)
            else:
                trees = succlist(g, succ)
                f1 = bestf(trees)
                for tree1, solved, sol in expand(path, (node, f1, g, trees), bound):
                    yield (tree1, solved, sol)
        elif f > bound: yield (tree, "no", None)
    else: # stromový uzel
        node, f, g, trees = tree
        if trees == Nil: yield (None, "never", None)
        else:
            if f <= bound:
                bound1 = min(bound, bestf(trees.tail))
                for t1, solved1, sol1 in expand(Cons(node, path), trees.head, bound1):
                    for tree1, solved, sol in continue_(path, (node, f, g, Cons(t1, trees.tail)),
                                                        bound, solved1, sol1):
                        yield (tree1, solved, sol)
            elif f > bound: yield (tree, "no", None)

# pokrač. →
```

vrací *trojici*: **(tree1, solved, sol)**

succlist setřídí seznam listů podle f-hodnot

continue – volba způsobu pokračování podle výsledků **expand**

Hledání nejlepší cesty – algoritmus A* – pokrač.

```
def continue_(path, tree, bound, subtr_solved, sol):
    node, _, g, trees = tree
    if subtr_solved == "yes":
        yield (None, "yes", sol)
    elif subtr_solved == "no":
        nts = insert(trees.head, trees.tail)
        f1 = bestf(nts)
        for tree1, solved, sol in expand(path, (node, f1, g, nts), bound):
            yield (tree1, solved, sol)
    elif subtr_solved == "never":
        f1 = bestf(trees.tail)
        for tree1, solved, sol in expand(path, (node, f1, g, trees.tail), bound):
            yield (tree1, solved, sol)

# pokrač. →
```

continue – volba způsobu pokračování podle výsledků **expand**

Hledání nejlepší cesty – algoritmus A* – pokrač.

```
def succlist(g0, succ):
    if succ == Nil: return Nil
    n, c = succ.head
    g = g0 + c
    f_ = g + h(n)
    ts1 = succlist(g0, succ.tail)
    ts = insert((n, f_, g), ts1)
    return ts

def f(tree):
    if len(tree) == 3: # listový uzel
        _, f_, _ = tree
    else: # stromový uzel
        _, f_, _, _ = tree
    return f_

def bestf(trees):
    if trees == Nil: return biggest
    return f(trees.head)

def insert(t, ts):
    if f(t) <= bestf(ts): return Cons(t, ts)
    return Cons(ts.head, insert(t, ts.tail))
```

succlist(g0, succ) setřídí seznam listů podle f-hodnot
vrací setříděný seznam

"vytáhne" **f** ze struktury

nejlepší f-hodnota ze seznamu stromů

vloží **t** do seznamu stromů **ts** podle f

Hledání nejlepší cesty – algoritmus A* – heapq

řešení pomocí modulu heapq – implementace prioritní fronty

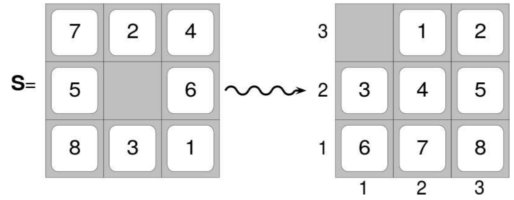
```
import heapq

def best_search(start):
    heap = [(0, 0, start, Nil)]
    while True:
        try:
            f, g, node, path = heapq.heappop(heap)
        except IndexError: # fronta je prázdná
            break
        path1 = Cons(node, path)
        if is_goal(node):
            yield (f, path1)
        if f <= biggest:
            for m, c in move_anyYC(node):
                if not member(m, path1):
                    heapq.heappush(heap, (g+c+h(m), g+c, m, path1))
```


Příklad – řešení posunovačky

konfigurace = seznam souřadnic **X/Y**: [pozice$_{\text{díry}}$, pozice$_{\text{kámen č.1}}$, ...]

```
start([2/2, 3/1, 2/3, 2/1, 3/3,
       1/2, 3/2, 1/3, 1/1]).
goal([1/3, 2/3, 3/3, 1/2, 2/2,
      3/2, 1/1, 2/1, 3/1]).
```



move(+Uzel, -NaslUzel,-Cena) pomocí pohybů mezery (cena vždy 1)

```
move([XB/YB | Numbers], [XL/YB | NewNumbers], 1) :- % doleva
    XB>1, XL is XB − 1, replace(XL/YB, XB/YB, Numbers, NewNumbers).
move([XB/YB | Numbers], [XR/YB | NewNumbers], 1) :- % doprava
    XB<3, XR is XB + 1, replace(XR/YB, XB/YB, Numbers, NewNumbers).
move([XB/YB | Numbers], [XB/YD | NewNumbers], 1) :- % dolů
    YB>1, YD is YB − 1, replace(XB/YD, XB/YB, Numbers, NewNumbers).
move([XB/YB | Numbers], [XB/YU | NewNumbers], 1) :- % nahoru
    YB<3, YU is YB + 1, replace(XB/YU, XB/YB, Numbers, NewNumbers).

% replace(+Co, +Cim, +Seznam, −NovySeznam)
replace(Co,Cim,[Co|T],[Cim|T]):- !.
replace(Co,Cim,[H|T1],[H|T2]) :- replace(Co,Cim,T1,T2).
```


Příklad – řešení posunovačky pokrač.

Volba přípustné heuristické funkce h:

- $h_1(n)$ = počet dlaždiček, které nejsou na svém místě $h_1(\mathbf{S}) = 8$
- $h_2(n)$ = součet manhattanských vzdáleností dlaždic od svých správných pozic $h_2(\mathbf{S}) = 3_7 + 1_2 + 2_4 + 2_5 + 3_6 + 2_8 + 2_3 + 3_1 = 18$

h_1 i h_2 jsou přípustné ... $h^*(S) = 26$

```
:- start(Start), bestsearch(Start, Solution),
   reverse(Solution, RSolution), writelist(RSolution).
 1: [2/2, 3/1, 2/3, 2/1, 3/3, 1/2, 3/2, 1/3, 1/1]
 2: [1/2, 3/1, 2/3, 2/1, 3/3, 2/2, 3/2, 1/3, 1/1]
...
26: [1/2, 2/3, 3/3, 1/3, 2/2, 3/2, 1/1, 2/1, 3/1]
27: [1/3, 2/3, 3/3, 1/2, 2/2, 3/2, 1/1, 2/1, 3/1]
```


Jak najít přípustnou heuristickou funkci?

- je možné najít obecné pravidlo, jak objevit heuristiku h_1 nebo h_2?
- h_1 i h_2 jsou délky cest pro zjednodušené verze problému Posunovačka:
  - při přenášení dlaždice kamkoliv – h_1=počet kroků nejkratšího řešení
  - při posouvání dlaždice kamkoliv o 1 pole (i na plné) – h_2=počet kroků nejkratšího řešení
- relaxovaný problém – méně omezení na akce než původní problém

  Cena optimálního řešení relaxovaného problému je přípustná heuristika pro původní problém.

  optimální řešení původního problému = řešení relaxovaného problému

Posunovačka a relaxovaná posunovačka:

- dlaždice se může přesunout z A na B $\Leftrightarrow$ A sousedí s B $\wedge$ B je prázdná
- (a) dlaždice se může přesunout z A na B $\Leftrightarrow$ A sousedí s B .. h_2
  (b) dlaždice se může přesunout z A na B $\Leftrightarrow$ B je prázdná ... Gaschnigova h.
  (c) dlaždice se může přesunout z A na B .... h_1

Určení kvality heuristiky

efektivní faktor větvení b^* – $N \ldots$ počet vygenerovaných uzlů, $d \ldots$ hloubka řešení, idealizovaný strom s $N+1$ uzly má faktor větvení b^* (reálné číslo):

$$N + 1 = 1 + b^* + (b^*)^2 + \cdots + (b^*)^d$$

např.: když A* najde řešení po 52 uzlech v hloubce 5 ... $b^* = 1.92$
heuristika je tím lepší, čím blíže je b^* hodnotě 1.

☞ měření b^* na množině testovacích sad – dobrá představa o přínosu heuristiky

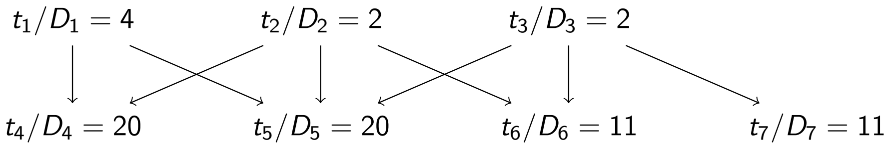
8-posunovačka

	Průměrný počet uzlů			Efektivní faktor větvení b^*		
d	IDS	A$^*(h_1)$	A$^*(h_2)$	IDS	A$^*(h_1)$	A$^*(h_2)$
2	10	6	6	2.45	1.79	1.79
6	680	20	18	2.73	1.34	1.30
10	47127	93	39	2.79	1.38	1.22
12	3644035	227	73	2.78	1.42	1.24
18	–	3056	363	–	1.46	1.26
24	–	39135	1641	–	1.48	1.26

h_2 dominuje h_1 $(\forall n : h_2(n) \geq h_1(n))$ ... h_2 je lepší (nebo stejná) než h_1 ve všech případech

Příklad – rozvrh práce procesorů

- úlohy t_i s potřebným časem na zpracování D_i (např.: $i = 1, \ldots, 7$)
- m procesorů (např.: $m = 3$)
- relace precedence mezi úlohami – které úlohy mohou začít až po skončení dané úlohy



- problém: najít rozvrh práce pro každý procesor s minimalizací celkového času

	0 2 4	13	24	33
CPU$_1$	t_3 ⟸ t_6 ⟹	⟸ t_5 ⟹		
CPU$_2$	t_2 ⟸ t_7 ⟹	....		
CPU$_3$	t_1 ⟹⟸ t_4 ⟹	.....		

	0 2 4	13	24	33
CPU$_1$	t_3 ⟸ t_6 ⟹	⟸ t_7 ⟹	.....	
CPU$_2$	t_2 . ⟸ t_5 ⟹		.....	
CPU$_3$	t_1 ⟹⟸ t_4 ⟹		.....	

Příklad – rozvrh práce procesorů – pokrač.

- stavy: **nezařazené_úlohy*běžící_úlohy*čas_ukončení**
  např.: **[WaitingT1/D1,WaitingT2/D2,...]*[Task1/F1,Task2/F2,Task3/F3]*FinTime**
  běžící_úlohy udržujeme setříděné $\mathbf{F1} \leq \mathbf{F2} \leq \mathbf{F3}$
- přechodová funkce **move(+Uzel, -NaslUzel, -Cena)**:

```
move(Tasks1*[_/F|Active1]*Fin1, Tasks2*Active2*Fin2, Cost) :-
    del1(Task/D,Tasks1,Tasks2),
    \+ (member(T/_,Tasks2),before(T,Task)), % kontrola predence v čekajících
    \+ (member(T1/F1,Active1),F<F1,before(T1,Task)), % a v zařazených úlohách
    Time is F+D, insert(Task/Time,Active1,Active2,Fin1,Fin2), Cost is Fin2−Fin1.
move(Tasks*[_/F|Active1]*Fin,Tasks*Active2*Fin,0) :- insertidle(F,Active1,Active2).

before(T1,T2) :- precedence(T1,T2).
before(T1,T2) :- precedence(T,T2),before(T1,T).
```

before(+Task1, +Task2)
tranzitivní obal relace **precedence**

```
insert(S/A,[T/B|L],[S/A,T/B|L],F,F) :- A=<B,!.
insert(S/A,[T/B|L],[T/B|L1],F1,F2) :- insert(S/A,L,L1,F1,F2).
insert(S/A,[],[S/A],_,A).

insertidle(A,[T/B|L],[idle/B,T/B|L]) :- A<B,!.
insertidle(A,[T/B|L],[T/B|L1]) :- insertidle(A,L,L1).

goal([]*_*_).
```


Příklad – rozvrh práce procesorů – pokrač.

- počáteční uzel:
  start([t1/4, t2/2, t3/2, t4/20, t5/20, t6/11, t7/11]*[idle/0, idle/0, idle/0]*0).
- heuristika
  optimální (nedosažitelný) čas:

$$\mathbf{Finall} = \frac{\sum_i D_i + \sum_j F_j}{m}$$

skutečný čas výpočtu:

$$\mathbf{Fin} = \max(F_j)$$

heuristická funkce h:

$$\mathbf{H} = \begin{cases} \mathbf{Finall} - \mathbf{Fin}, \\ \quad \text{když } \mathbf{Finall} > \mathbf{Fin} \\ 0, \quad \text{jinak} \end{cases}$$

```
h(Tasks * Processors * Fin, H) :-
  totaltime(Tasks, Tottime),
  sumnum(Processors, Ftime, N),
  Finall is (Tottime + Ftime)/N,
  (Finall > Fin, !, H is Finall − Fin
   ; H = 0).

totaltime([], 0).
totaltime([_/D | Tasks], T) :-
  totaltime(Tasks, T1), T is T1 + D.

sumnum([], 0, 0).
sumnum([_/T | Procs], FT, N) :-
  sumnum(Procs, FT1, N1),
  N is N1 + 1, FT is FT1 + T.

precedence(t1, t4). precedence(t1, t5).
...
```

Příklad – rozvrh práce procesorů – pokrač.

```
:- start(Start), write('Pocatecni stav:'), write(Start), nl,
     bestsearch(Start, Solution),
     write('Nalezene reseni:'), nl,
     reverse(Solution,RSolution), writelist(RSolution).
```

```
Pocatecni stav: [t1/4,t2/2,t3/2,t4/20,t5/20,t6/11,t7/11]*[idle/0,idle/0,idle/0]*0
Nalezene reseni:
1: [t1/4,t2/2,t3/2,t4/20,t5/20,t6/11,t7/11]*[idle/0,idle/0,idle/0]*0
2: [t1/4,t2/2,t4/20,t5/20,t6/11,t7/11]*[idle/0,idle/0,t3/2]*2
3: [t1/4,t4/20,t5/20,t6/11,t7/11]*[idle/0,t2/2,t3/2]*2
4: [t4/20,t5/20,t6/11,t7/11]*[t2/2,t3/2,t1/4]*4
5: [t4/20,t5/20,t6/11]*[t3/2,t1/4,t7/13]*13
6: [t4/20,t5/20,t6/11]*[idle/4,t1/4,t7/13]*13
7: [t5/20,t6/11]*[t1/4,t7/13,t4/24]*24
8: [t6/11]*[t7/13,t5/24,t4/24]*24
9: []*[t6/24,t5/24,t4/24]*24
```