

Prohledávání stavového prostoru

Aleš Horák

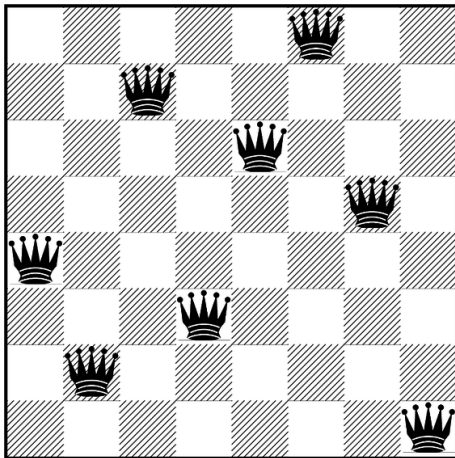
E-mail: hales@fi.muni.cz
<http://nlp.fi.muni.cz/uui/>

Obsah:

- ▶ Problém osmi dam
- ▶ Prohledávání stavového prostoru
- ▶ Neinformované prohledávání

Problém osmi dam

úkol: Rozestavte po šachovnici 8 dam tak, aby se žádné dvě vzájemně neohrožovaly.



celkem pro 8 dam existuje 92 různých řešení

Problém osmi dam I

datová struktura – osmiprvkový seznam **[X1/Y1, X2/Y2, X3/Y3, X4/Y4, X5/Y5, X6/Y6, X7/Y7, X8/Y8]**

Solution = [1/4, 2/2, 3/7, 4/3, 5/6, 6/8, 7/5, 8/1]

solution(S) :- template(S), sol(S).

sol([]).

**sol([X/Y|Others]) :- sol(Others),
 member(X,[1,2,3,4,5,6,7,8]),
 member(Y,[1,2,3,4,5,6,7,8]),
 noattack(X/Y,Others).**

noattack(-,[]).

**noattack(X/Y,[X1/Y1|Others]) :- X=\=X1, Y=\=Y1, Y1-Y=\=X1-X,
 Y1-Y=\=X-X1, noattack(X/Y,Others).**

template([X1/Y1, X2/Y2, X3/Y3, X4/Y4, X5/Y5, X6/Y6, X7/Y7, X8/Y8]).

?– **solution(Solution).**

Solution = [8/4, 7/2, 6/7, 5/3, 4/6, 3/8, 2/5, 1/1] ;

Solution = [7/2, 8/4, 6/7, 5/3, 4/6, 3/8, 2/5, 1/1] ;

Yes

Problém osmi dam II

počet možností u řešení I = $64^8 = 281\,474\,976\,710\,656$

při použití **del** = $64 \cdot 63 \cdot 62 \dots \cdot 57 = 178\,462\,987\,637\,760$

omezení **stavového prostoru** – každá dáma má svůj sloupec

počet možností u řešení II = $8 \cdot 7 \cdot 6 \dots \cdot 1 = 40\,320$

`solution(S) :- template(S), sol(S).`

`sol([]).`

`sol([X/Y|Others]) :- sol(Others), member(Y,[1,2,3,4,5,6,7,8]),
noattack(X/Y,Others).`

`noattack(-,[]).`

`noattack(X/Y,[X1/Y1|Others]) :- Y=\=Y1, Y1-Y=\=X1-X, Y1-Y=\=X-X1,
noattack(X/Y,Others).`

`template([1/Y1,2/Y2,3/Y3,4/Y4,5/Y5,6/Y6,7/Y7,8/Y8]).`

Problém osmi dam III

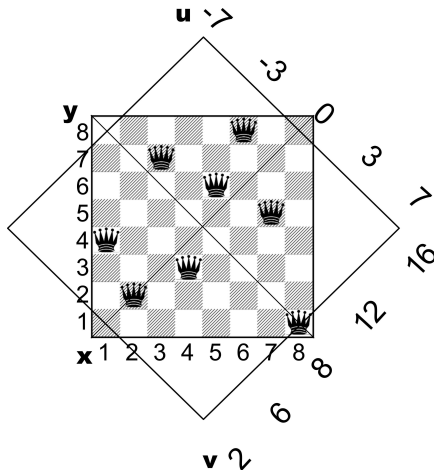
k souřadnicím x a y → přidáme i souřadnice diagonály u a v

$$u = x - y$$

$$v = x + y$$

$$D_x = [1..8] \quad \rightarrow \quad D_u = [-7..7]$$

$$D_y = [1..8] \quad \rightarrow \quad D_v = [2..16]$$



Problém osmi dam III

po každém umístění dámy aktualizujeme seznamy volných pozic
počet možností u řešení III = 2 057

```

solution(YList) :- sol(YList,[1,2,3,4,5,6,7,8],[1,2,3,4,5,6,7,8],
                      [-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7],
                      [2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16]).

sol([],[],Dy,Du,Dv).
sol([Y|YList],[X|Dx1],Dy,Du,Dv) :- del(Y,Dy,Dy1), U is X-Y,
    del(U,Du,Du1), V is X+Y, del(V,Dv,Dv1), sol(YList,Dx1,Dy1,Du1,Dv1).

```

% když del nenajde Item, končí neúspěchem

```
del(Item,[Item|List],List).
```

```
del(Item,[First|List],[First|List1]) :- del(Item,List,List1).
```

Problém n dam pro $n = 100$:

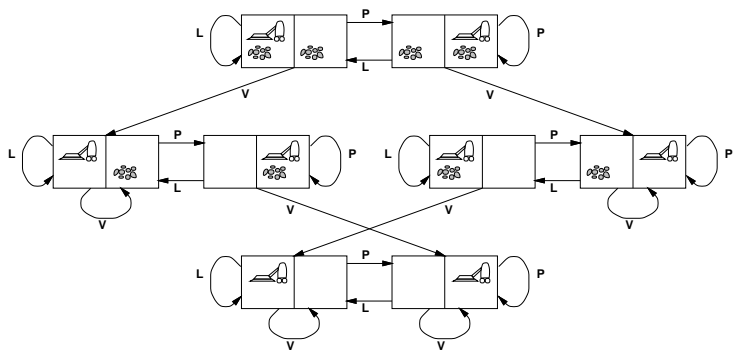
řešení I ... 10^{400} řešení II ... 10^{158} řešení III ... 10^{52}

Prohledávání stavového prostoru

Řešení problému prohledáváním stavového prostoru:

- ▶ **stavový prostor**, předpoklady – statické a deterministické prostředí, diskrétní stavy
- ▶ *počáteční stav* **init(State)**
- ▶ *cílová podmínka* **goal(State)**
- ▶ *přechodové akce* **move(State,NewState)**

Problém agenta Vysavače



- ▶ máme dvě **místnosti** (L, P)
- ▶ jeden **vysavač** (v L nebo P)
- ▶ v každé místnosti je/není špína
- ▶ počet **stavů** je $2 \times 2^2 = 8$
- ▶ **akce** = {doLeva, doPrava, Vysávej}

Problém agenta Vysavače

Prohledávací strategie – prohledávací strom:

▶ kořenový uzel


▶ uzel prohledávacího stromu:

- stav
- rodičovský uzel
- přechodová akce
- hloubka uzlu
- cena – $g(n)$ cesty, $c(x, a, y)$ přechodu

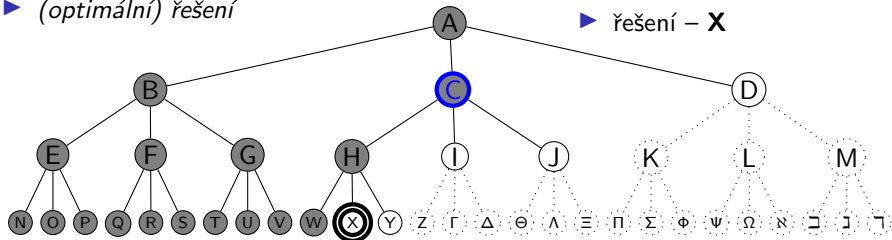
▶ (optimální) řešení

▶ **A** (stav )

▶ např. uzel **C**:

- stav – 
- rodič – **A**
- akce – **doPrava**
- hloubka – **1**
- cena – **1**

▶ řešení – **X**



Další příklad – posunovačka

počáteční stav (např.)

7	2	4
5		6
8	3	1

→ ... →

cílový stav

	1	2
3	4	5
6	7	8

- ▶ hra na čtvercové šachovnici $m \times m$ s $n = m^2 - 1$ očíslovanými kameny
- ▶ příklad pro šachovnici 3×3 , posunování osmi kamenů (8-posunovačka)
- ▶ **stavy** – pozice všech kamenů
- ▶ **akce** – “pohyb” prázdného místa

☞ **Optimální řešení** obecné n -posunovačky je **NP-úplné**

Počet stavů	u 8-posunovačky	...	$9!/2 = 181\,440$
	u 15-posunovačky	...	10^{13}
	u 24-posunovačky	...	10^{25}

Reálné problémy řešitelné prohledáváním

- ▶ hledání cesty z města A do města B
- ▶ hledání itineráře, problém obchodního cestujícího
- ▶ návrh VLSI čipu
- ▶ navigace auta, robota, . . .
- ▶ postup práce automatické výrobní linky
- ▶ návrh proteinů – 3D-sekvence aminokyselin
- ▶ Internetové vyhledávání informací

Řešení problému prohledáváním

Kostra algoritmu:

```
solution(Solution) :- init(State),solve(State,Solution).
```

```
solve(State,[State]) :- goal(State).
```

```
solve(State,[State|Sol]) :- move(State,NewState),solve(NewState,Sol).
```

move(State,NewState) – definuje prohledávací **strategii**

Porovnání strategií:

- ▶ úplnost
- ▶ optimálnost
- ▶ časová složitost
- ▶ prostorová složitost

složitost závisí na:

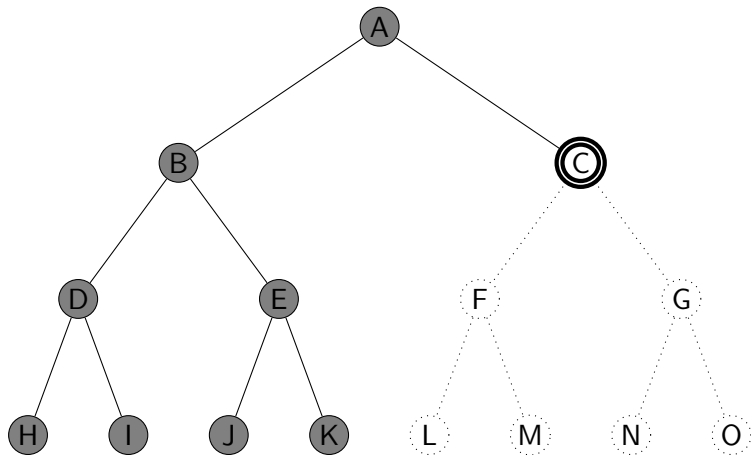
- ▶ b – faktor **větvení** (branching factor)
- ▶ d – hloubka cíle (goal depth)
- ▶ m – maximální hloubka větve/délka cesty (maximum depth/path, může být ∞ ?)

Neinformované prohledávání

- ▶ prohledávání do hloubky
- ▶ prohledávání do hloubky s limitem
- ▶ prohledávání do šířky
- ▶ prohledávání podle ceny
- ▶ prohledávání s postupným prohlubováním

Prohledávání do hloubky

Prohledává se vždy nejlevější a nejhlubší neexpandovaný uzel (*Depth-first Search, DFS*)



Prohledávání do hloubky

procedurální programovací jazyk – uzly se uloží do zásobníku (fronty LIFO) × Prolog – využití rekurze

```
solution(Node,Solution) :- depth_first_search([],Node,Solution).
```

```
depth_first_search(Path,Node,[Node|Path]) :- goal(Node).
```

```
depth_first_search(Path,Node,Sol) :- move(Node,Node1),
```

```
    \+ member(Node1,Path),depth_first_search([Node|Path],Node1,Sol).
```

Prohledávání do hloubky – vlastnosti

úplnost není úplný (nekonečná větev, cykly)

optimálnost není optimální

časová složitost $O(b^m)$

prostorová složitost $O(bm)$, lineární

Největší problém – nekonečná větev = nenajde se cíl, program neskončí!

Prohledávání do hloubky s limitem

Řešení nekonečné větve – použití “zarážky” = limit hloubky ℓ

`solution(Node,Solution) :- depth_first_search_limit(Node,Solution, ℓ).`

`depth_first_search_limit(Node,[Node],_) :- goal(Node).`

`depth_first_search_limit(Node,[Node|Sol],MaxDepth) :- MaxDepth>0,
 move(Node,Node1), Max1 is MaxDepth-1,
 depth_first_search_limit(Node1,Sol,Max1).`

neúspěch (**fail**) má dvě možné interpretace – vyčerpání limitu nebo neexistenci řešení

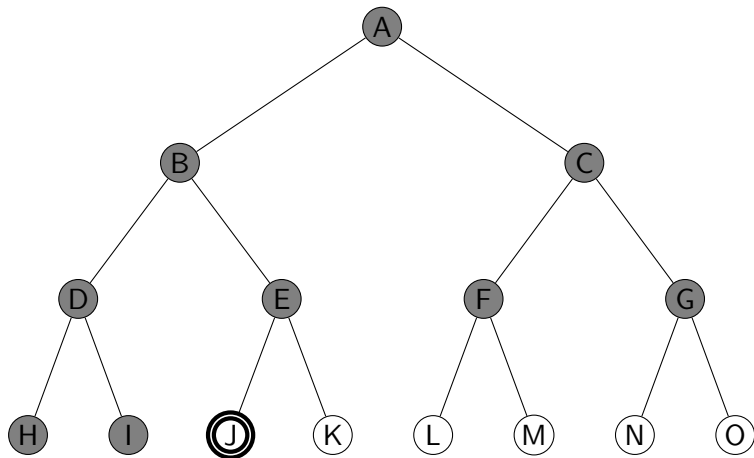
Vlastnosti:

<i>úplnost</i>	není úplný (pro $\ell < d$)
<i>optimálnost</i>	není optimální (pro $\ell > d$)
<i>časová složitost</i>	$O(b^\ell)$
<i>prostorová složitost</i>	$O(b^\ell)$

dobrá volba limitu ℓ – podle znalosti problému

Prohledávání do šířky

Prohledává se vždy nejlevější neexpandovaný uzel s nejmenší hloubkou.
(*Breadth-first Search, BFS*)



Prohledávání do šířky

procedurální programovací jazyk – uzly se uloží do **fronty** (FIFO) × Prolog
 – udržuje **seznam cest**

```
solution(Start,Solution) :- breadth_first_search([[Start]],Solution).
```

```
breadth_first_search([[Node|Path]|_],[Node|Path]) :- goal(Node).
```

```
breadth_first_search([[N|Path]|Paths],Solution) :-
  bagof([M,N|Path], (move(N,M), \+ member(M,[N|Path])), NewPaths),
  NewPaths\=[], append(Paths,NewPaths,Path1), !,
  breadth_first_search(Path1,Solution); _ breadth_first_search(Paths,Solution).
```

bagof(+Prom,+Cíl,-Sezn)

postupně vyhodnocuje **Cíl**

a všechny vyhovující

instance **Prom** řadí

do seznamu **Sezn**

p :- a,b;c. ⇔ p :- (a,b);c.

Vylepšení:

▶ **append** → **append_dl**

▶ seznam cest:

<pre>[[a]] [[b,a],[c,a]] [[c,a],[d,b,a],[e,b,a]] [[d,b,a],[e,b,a],[f,c,a],[g,c,a]]</pre>	→	<pre>l(a) t(a,[l(b),l(c)]) t(a,[t(b,[l(d),l(e)]),l(c)]) t(a,[t(b,[l(d),l(e)]),t(c,[l(f),l(g)])])</pre>
--	---	--

Prohledávání do šířky – vlastnosti

<i>úplnost</i>	je úplný (pro konečné b)
<i>optimálnost</i>	je optimální podle délky cesty/ není optimální podle obecné ceny
<i>časová složitost</i>	$1 + b + b^2 + b^3 + \dots + b^d + b(b^d - 1) = O(b^{d+1})$, exponenciální v d
<i>prostorová složitost</i>	$O(b^{d+1})$ (každý uzel v paměti)

Největší problém – paměť:

Hloubka	Uzlů	Čas	Paměť
2	1100	0.11 sek	1 MB
4	111 100	11 sek	106 MB
6	10^7	19 min	10 GB
8	10^9	31 hod	1 TB
10	10^{11}	129 dnů	101 TB
12	10^{13}	35 let	10 PB
14	10^{15}	3 523 let	1 EB

Ani čas není dobrý → potřebujeme **informované** strategie prohledávání.

Prohledávání podle ceny

- ▶ BFS je optimální pro rovnoměrně ohodnocené stromy × **prohledávání podle ceny (Uniform-cost Search)** je optimální pro **obecné ohodnocení**
- ▶ fronta uzlů se udržuje **uspořádaná** podle ceny cesty

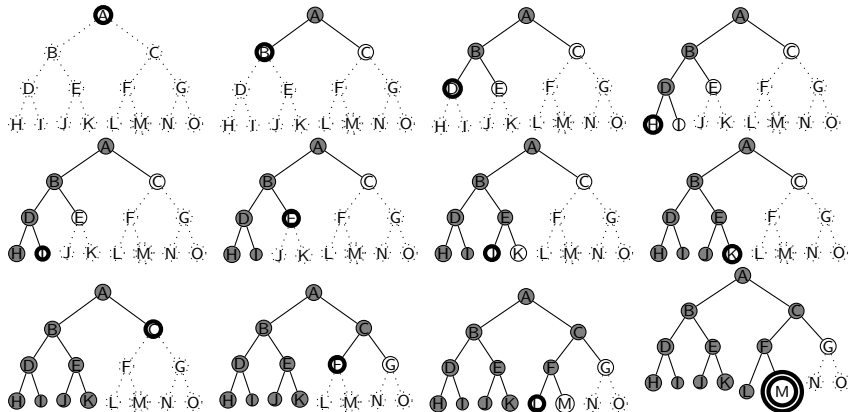
Vlastnosti:

<i>úplnost</i>	je úplný (pro $\epsilon \geq 0$ a b konečné)
<i>optimálnost</i>	je optimální (pro $\epsilon \geq 0$, $g(n)$ roste)
<i>časová složitost</i>	počet uzlů s $g \leq C^*$, $O(b^{1+\lceil C^*/\epsilon \rceil})$, kde $C^* \dots$ cena optimálního řešení
<i>prostorová složitost</i>	počet uzlů s $g \leq C^*$, $O(b^{1+\lceil C^*/\epsilon \rceil})$

Prohledávání s postupným prohlubováním

prohledávání do hloubky s postupně se **zvyšujícím limitem** (Iterative deepening DFS, IDS)

limit=3



Prohledávání s postupným prohlubováním – vlastnosti

úplnost je úplný (pro konečné b)

optimálnost je optimální (pro $g(n)$ rovnoměrně neklesající funkce hloubky)

časová složitost $d(b) + (d - 1)b^2 + \dots + 1(b^d) = O(b^d)$

prostorová složitost $O(bd)$

► kombinuje výhody BFS a DFS:

- nízké paměťové nároky – lineární
- optimálnost, úplnost

► zdánlivé plýtvání opakovaným generováním

ALE generuje o jednu úroveň níž, např. pro $b = 10, d = 5$:

$$N(\text{IDS}) = 50 + 400 + 3\,000 + 20\,000 + 100\,000 = 123\,450$$

$$N(\text{BFS}) = 10 + 100 + 1\,000 + 10\,000 + 100\,000 + 999\,990 = 1\,111\,100$$

IDS je **nejvhodnější** neinformovaná strategie pro **velké prostory** a **neznámou hloubku** řešení.

Shrnutí vlastností algoritmů neinformovaného prohledávání

<i>Vlastnost</i>	<i>do hloubky</i>	<i>do hloubky s limitem</i>	<i>do šířky</i>	<i>podle ceny</i>	<i>s postupným prohlubováním</i>
<i>úplnost</i>	ne	ano, pro $l \geq d$	ano*	ano*	ano*
<i>optimálnost</i>	ne	ne	ano*	ano*	ano*
<i>časová složitost</i>	$O(b^m)$	$O(b^\ell)$	$O(b^{d+1})$	$O(b^{1+\lfloor C^*/\epsilon \rfloor})$	$O(b^d)$
<i>prostorová složitost</i>	$O(bm)$	$O(b\ell)$	$O(b^{d+1})$	$O(b^{1+\lfloor C^*/\epsilon \rfloor})$	$O(bd)$