Dekompozice problému, AND/OR grafy

Aleš Horák

E-mail: hales@fi.muni.cz
http://nlp.fi.muni.cz/uui/

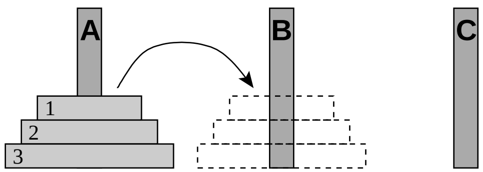
Obsah:

Připomínka – průběžná písemka

- termín – příští přednášku, 31. října, 12:00, A217, na začátku přednášky
- náhradní termín: není
- příklady (formou testu – odpovědi A, B, C, D, E, z látky probrané na prvních pěti přednáškách, včetně dnešní):
  - uveden příklad v Prologu+Pythonu, otázka Co řeší tento program?
  - uveden příklad v Prologu+Pythonu a cíl/volání programu, otázka Co je (návratová) hodnota výsledku?
  - upravte (vyberte úpravu/doplnění) uvedený program tak, aby…
  - uvedeno několik tvrzení, potvrďte jejich pravdivost/nepravdivost
  - porovnání vlastností několika algoritmů
- rozsah: 4 příklady
- hodnocení: max. 32 bodů – za *správnou odpověď* 8 bodů, za *žádnou odpověď* 0 bodů, za *špatnou odpověď* -3 body.

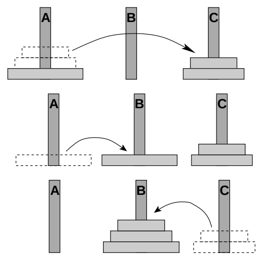
Příklad – Hanoiské věže

- máme tři tyče: **A**, **B** a **C**.
- na tyči **A** je (podle velikosti) n kotoučů.
- úkol: přeskládat z **A** pomocí **C** na tyč **B** (zaps. n**(A, B, C)**) bez porušení uspořádání



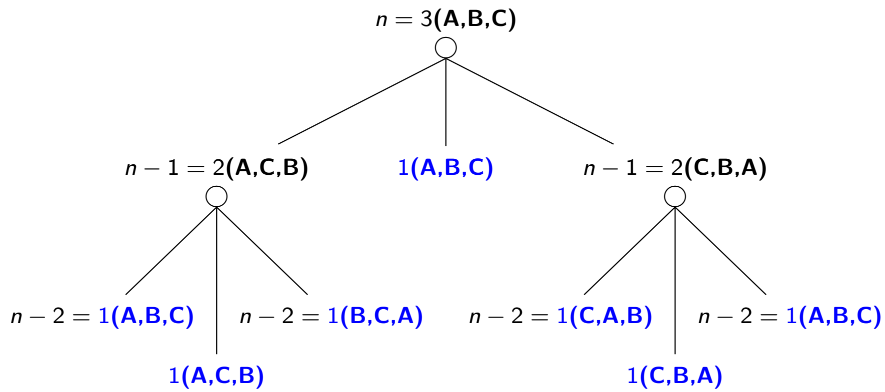
Můžeme rozložit na fáze:

1. přeskládat $n-1$ kotoučů z **A** pomocí **B** na **C**.
2. přeložit 1 kotouč z **A** na **B**
3. přeskládat $n-1$ kotoučů z **C** pomocí **A** na **B**



Příklad – Hanoiské věže – pokrač.

schéma celého řešení pro $n = 3$:



Příklad – Hanoiské věže – pokrač.

op(+Priorita, +Typ, +Jméno)
Priorita číslo 0–1200
Typ jedno z **xf**, **yf**, **xfx**, **xfy**, **yfx**, **yfy**, **fy** nebo **fx**
Jméno funktor nebo symbol

```
?-op(100,xfx,to), dynamic(hanoi/5).

hanoi(1,A,B,C,[A to B]).
hanoi(N,A,B,C,Moves) :- N>1, N1 is N-1, lemma(hanoi(N1,A,C,B,Ms1)),
    hanoi(N1,C,B,A,Ms2), append(Ms1,[A to B|Ms2],Moves).

lemma(P) :- P,asserta((P :- !)).

?- hanoi(3,a,b,c,M).
      M = [a to b, a to c, b to c, a to b, c to a, c to b, a to b] ;
      No
```

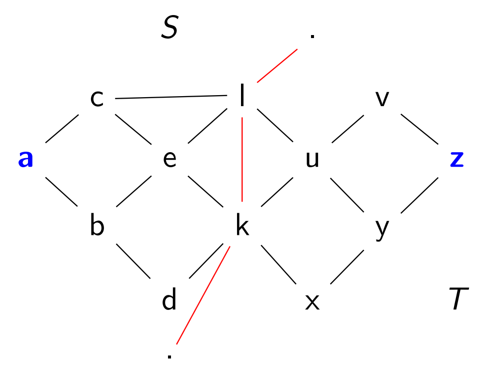

Cesta mezi městy pomocí dekompozice

města:

a, ..., **e**	...	ve státě S
l a **k**	...	hraniční přechody
u, ..., **z**	...	ve státě T

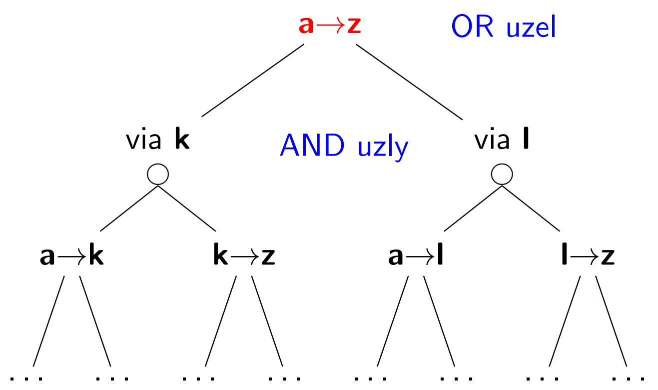
hledáme cestu z **a** do **z**:

- cesta z **a** do hraničního přechodu
- cesta z hraničního přechodu do **z**



Cesta mezi městy pomocí dekompozice – pokrač.

schéma řešení pomocí rozkladu na podproblémy = AND/OR graf

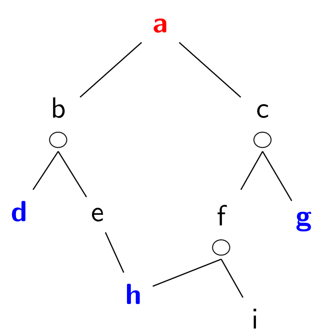


Celkové řešení = podgraf AND/OR grafu, který nevynechává žádného následníka AND-uzlu.

AND/OR graf a strom řešení

AND/OR graf = graf s 2 typy vnitřních uzlů – AND uzly a OR uzly

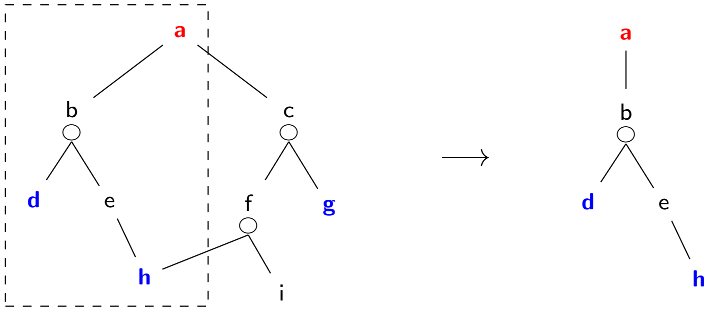
- *AND uzel* jako součást řešení vyžaduje průchod všech svých poduzlů
- *OR uzel* se chová jako běžný uzel klasického grafu



AND/OR graf a strom řešení

strom řešení T problému P s AND/OR grafem G:

- problém P je kořen stromu T
- jestliže P je OR uzel grafu G $\Rightarrow$ právě jeden z jeho následníků se svým stromem řešení je v T
- jestliže P je AND uzel grafu G $\Rightarrow$ všichni jeho následníci se svými stromy řešení jsou v T
- každý list stromu řešení T je cílovým uzlem v G

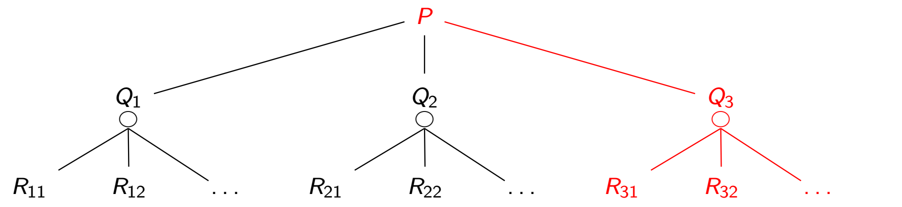


Příklad – výherní strategie

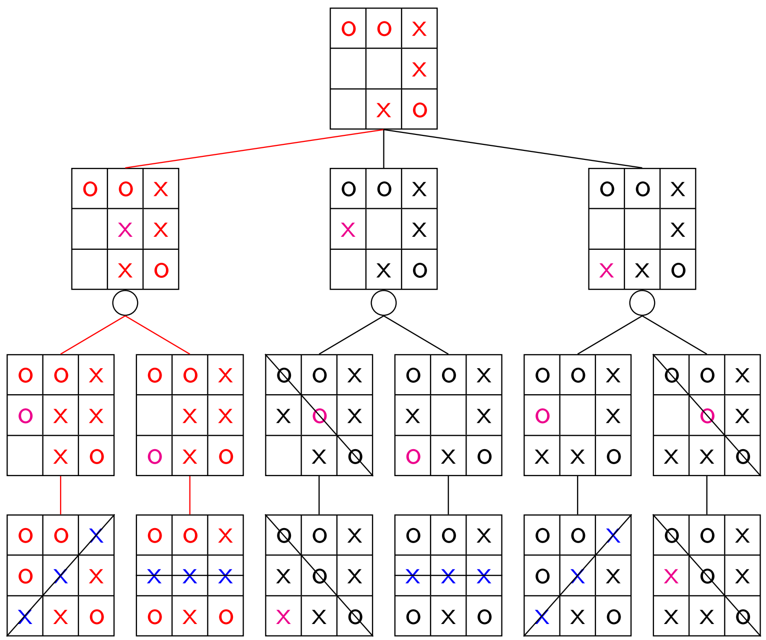
Hra 2 hráčů s perfektními znalostmi, 2 výstupy $\begin{cases} \text{výhra} \\ \text{prohra} \end{cases}$

Výherní strategii je možné formulovat jako AND/OR graf:

- počáteční stav P typu *já-jsem-na-tahu*
- moje tahy vedou do stavů $Q_1, Q_2, \dots$ typu *soupeř-je-na-tahu*
- následně soupeřovy tahy vedou do stavů $R_{11}, R_{12}, \dots$ *já-jsem-na-tahu*
- cíl – stav, který je výhra podle pravidel (*prohra* je neřešitelný problém)
- stav P *já-jsem-na-tahu* je výherní $\Leftrightarrow$ některý z Q_i je výherní, OR
- stav Q_i *soupeř-je-na-tahu* je výherní $\Leftrightarrow$ všechny R_{ij} jsou výherní, AND
- výherní strategie = řešení AND/OR grafu



Příklad – výherní strategie



Reprezentace AND/OR grafu

přímý zápis AND/OR grafu v Prologu:

- OR uzel **v** s následníky **u1**, **u2**, . . . , **uN**:

  ```
  v :- u1.
  v :- u2.
  . . .
  v :- uN.
  ```

- AND uzel **x** s následníky **y1**, **y2**, . . . , **yM**:

  ```
  x :- y1,  y2,  . . . ,yM.
  ```

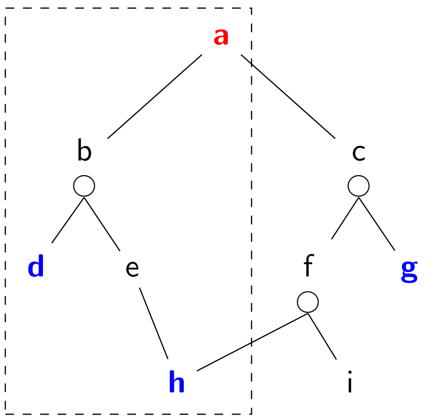
- cílový uzel **g** ($\triangleq$ elementární problém):

  ```
  g.
  ```

- kořenový uzel **root**:

  ```
  ?- root.
  ```

Triviální prohledávání AND/OR grafu v Prologu




```
a :- b.
a :- c.
b :- d,  e.
e :- h.
c :- f,  g.
f :- h,  i.
d.
g.
h.

?- a.
   Yes
```

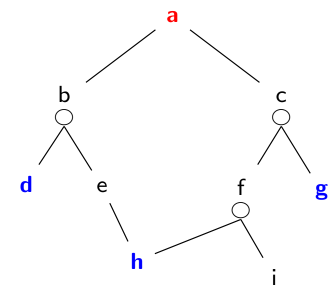

Reprezentace AND/OR grafu v Prologu

- zavedeme operátory '−−−>' a ':'

```
?- op(700, xfx, --->).
?- op(500, xfx, :).
```

- AND/OR graf budeme zapisovat

```
a ---> or:[b, c].
b ---> and:[d, e].
```




```
a ---> or:[b,c].
b ---> and:[d,e].
c ---> and:[f,g].
e ---> or:[h].
f ---> and:[h,i].
goal(d).
goal(g).
goal(h).
```


Prohledávání AND/OR grafu do hloubky

```
% solve(+Node, -SolutionTree)
solve(Node,Node) :- goal(Node).
solve(Node,Node ---> Tree) :-
    Node ---> or:Nodes, member(Node1,Nodes), solve(Node1,Tree).
solve(Node,Node ---> and:Trees) :-
    Node ---> and:Nodes, solveall(Nodes,Trees).

% solveall([Node1,Node2, ...], [SolutionTree1,SolutionTree2, ...])
solveall([],[]).
solveall([Node|Nodes],[Tree|Trees])  :- solve(Node,Tree),  solveall(Nodes,Trees).

?- solve(a,Tree).
    Tree = a---> (b--->and:[d, e--->h]) ;
    No
```


Heuristické prohledávání AND/OR grafu (AO*)

- doplnění reprezentace o cenu přechodové hrany (=míra složitosti podproblému):

  Uzel −−−> AndOr:[NaslUzel1/Cena1, NaslUzel2/Cena2, ...,NaslUzelN/CenaN].
- definujeme cenu uzlu jako cenu optimálního řešení jeho podstromu
- pro každý uzel N máme daný odhad jeho ceny:

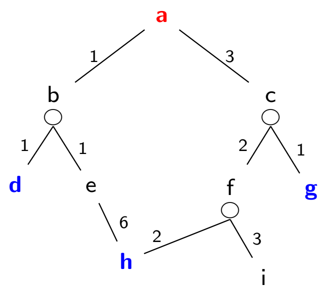
  $h(N)$ = heuristický odhad ceny optimálního podgrafu s kořenem N
- pro každý uzel N, jeho následníky $N_1, \dots, N_b$ a jeho předchůdce M definujeme:

$$F(N) = \mathrm{cena}(M,N) + \begin{cases} h(N), & \text{pro ještě neexpandovaný uzel } N \\ 0, & \text{pro cílový uzel (elementární problém)} \\ \min_i(F(N_i)), & \text{pro OR-uzel } N \\ \sum_i F(N_i), & \text{pro AND-uzel } N \end{cases}$$

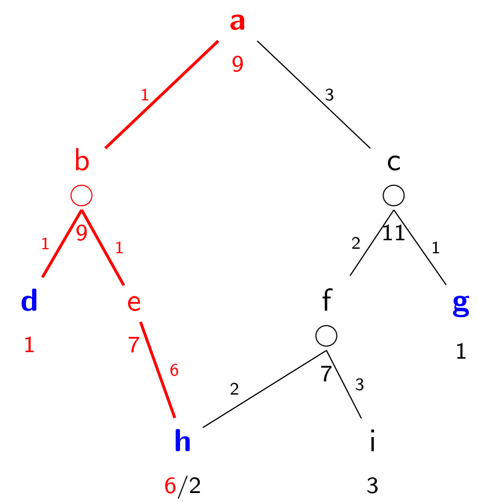
Pro optimální strom řešení S je tedy $F(S)$ právě cena tohoto řešení (=suma všech hran z S).

Heuristické prohledávání AND/OR grafu – příklad

setříděný seznam částečně expandovaných grafů =
[Nevyřešený$_1$, Nevyřešený$_2$, ..., Vyřešený$_1$, ...]
$F_{\text{Nevyřešený}_1} \leq F_{\text{Nevyřešený}_2} \leq \dots$



předp. $\forall N : h(N) = 0$



Reprezentace AND/OR grafu při heuristickém prohledávání

F ... příslušná heuristická *F*-hodnota uzlu **N**

C ... cena hrany do uzlu **N**

N ... identifikátor uzlu

- list AND/OR grafu ... struktura **leaf(N,F,C)**
  $\mathbf{F} = \mathbf{C} + h(\mathbf{N})$
- OR uzel AND/OR grafu ... struktura **tree(N,F,C,or:[T1,T2,T3,...])**
  $\mathbf{F} = \mathbf{C} + \min_i \mathbf{F}_i$
- AND uzel AND/OR grafu ... struktura **tree(N,F,C,and:[T1,T2,T3,...])**
  $\mathbf{F} = \mathbf{C} + \sum_i \mathbf{F}_i$
- vyřešený list AND/OR grafu ... struktura **solvedleaf(N,F)**
  $\mathbf{F} = \mathbf{C}$
- vyřešený OR uzel AND/OR grafu ... struktura **solvedtree(N,F,T)**
  $\mathbf{F} = \mathbf{C} + \mathbf{F}_1$
- vyřešený AND uzel AND/OR grafu ... **solvedtree(N,F,and:[T1,T2,...])**
  $\mathbf{F} = \mathbf{C} + \sum_i \mathbf{F}_i$

Python – **("typ uzlu", n, f, ...)**:
("leaf",n,f,c), **("tree",n,f,c,("or",subtrees))**, ...

Heuristické prohledávání AND/OR grafu (AO*)

```
def andor(node):
    sol, solved = expand(("leaf", node, 0, 0), biggest)
    if solved == "yes": return sol
    else: raise ValueError("Reseni neexistuje.")

def expand(tree, bound):
    if f(tree) > bound: return (tree, "no")
    tree_type = tree[0]
    if tree_type == "leaf":
        _, node, f_, c = tree
        if is_goal(node): return (("solved_leaf", node, f_), "yes")
        tree1 = expandnode(node, c)
        if tree1 is None: return (None, "never") # neexistuji naslednici
        return expand(tree1, bound)
    elif tree_type == "tree":
        _, node, f_, c, subtrees = tree
        newsubs, solved1 = expandlist(subtrees, bound-c)
        return continue_(solved1, node, c, newsubs, bound)

def expandlist(trees, bound):
    tree, othertrees, bound1 = select_tree(trees, bound)
    newtree, solved = expand(tree, bound1)
    return combine(othertrees, newtree, solved)
```

expand(tree, bound) → (newtree, solved)
expanduje **tree** po **bound**. Výsledek je **newtree** se stavem **solved**.

expandlist → (newtrees, solved)
expanduje nejlepší (první) graf v seznamu **trees** se závorou **bound**. Výsledek je v seznamu **newtrees** a celkový stav v **solved**

Heuristické prohledávání AND/OR grafu (AO*) – pokrač.

```
def continue_(subtr_solved, node, c, subtrees, bound):
    if subtr_solved == "never": return (None, "never")
    h_ = bestf(subtrees)
    f_ = c + h_
    if subtr_solved == "yes": return (("solved_tree", node, f_, subtrees), "yes")
    if subtr_solved == "no": return expand(("tree", node, f_, c, subtrees), bound)

def combine(subtrees, tree, solved):
    op, trees = subtrees
    if op == "or":
        if solved == "yes": return (("or_result", tree), "yes")
        if solved == "no":
            newtrees = insert(tree, trees)
            return (("or", newtrees), "no")
        if solved == "never":
            if trees == Nil: return (None, "never")
            return (("or", trees), "no")
    if op == "and":
        if solved == "yes" and are_all_solved(trees):
            return (("and_result", Cons(tree, trees)), "yes")
        if solved == "never": return (None, "never")
        newtrees = insert(tree, trees)
        return (("and", newtrees), "no")
```

continue → (solution, solved)
určuje, jak pokračovat po expanzi seznamu grafů

combine(othertrees,newtree,solved) → (newtrees,solved)
kombinuje výsledky expanze stromu a seznamu stromů

Heuristické prohledávání AND/OR grafu (AO*) – pokrač.

expandnode převede uzel z ("leaf", node, f, c) do ("tree", node, f, c, subtrees)

```
def expandnode(node, c):
    succ = get_successors(node)  # podle zadaného AND/OR grafu
    if succ is None: return None
    op, successors = succ
    subtrees = evaluate(successors)
    f_ = c + bestf((op, subtrees))  # c + best h
    return ("tree", node, f_, c, (op, subtrees))
```

evaluate vypočítá hodnoty pro seznam následovníků

```
def evaluate(nodes):
    if nodes == Nil: return Nil
    node, c = nodes.head
    f_ = c + h(node)
    trees1 = evaluate(nodes.tail)
    trees = insert(("leaf", node, f_, c), trees1)
    return trees
```

are_all_solved zkontroluje, jestli všechny stromy v seznamu jsou vyřešené

```
def are_all_solved(trees):
    if trees == Nil: return True
    return is_solved(trees.head) and are_all_solved(trees.tail)

def is_solved(tree):
    tree_type = tree[0]
    return tree_type == "solved_tree" or tree_type == "solved_leaf"
```


Heuristické prohledávání AND/OR grafu (AO*) – pokrač.

insert vkládá strom do seznamu stromů se zachováním třídění

```
def insert(t, trees):
    if trees == Nil: return Cons(t, Nil)
    t1 = trees.head
    ts = trees.tail
    if is_solved(t1):  return Cons(t, trees)
    if is_solved(t):  return Cons(t1, insert(t, ts))
    if f(t) <= f(t1): return Cons(t, trees)
    return Cons(t1, insert(t, ts))
```

select_tree(trees, bound) → **(besttree, (op, othertrees), bound1)** vybere **besttree** z **trees**, zbytek je v **othertrees**. **bound** je závora pro **trees**, **bound1** pro **besttree**

```
def select_tree(subtrees, bound):
    op, trees = subtrees
    if trees.tail == Nil: return (trees.head, (op, Nil), bound)
    f_ = bestf((op, trees.tail))
    if op == "or": bound1 = min(bound, f_)
    if op == "and": bound1 = bound - f_
    return (trees.head, (op, trees.tail), bound1)
```


Heuristické prohledávání AND/OR grafu (AO*) – pokrač.

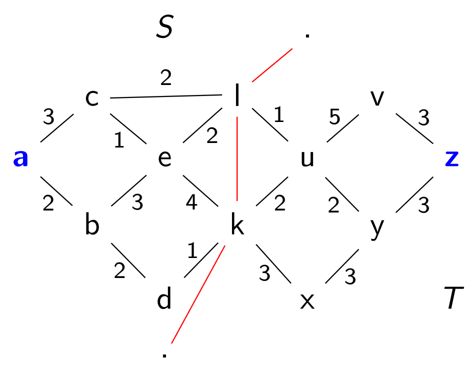
```
def f(tree):
    return tree[2]
```

bestf vyhledá uloženou *F*-hodnotu AND/OR stromu/uzlu

```
def bestf(subtrees):
    op = subtrees[0]
    if op == "or":
        trees = subtrees[1]
        return f(trees.head)
    if op == "and" or op == "and_result":
        trees = subtrees[1]
        if trees == Nil: return 0
        return f(trees.head) + bestf(("and", trees.tail))
    if op == "or_result":
        tree = subtrees[1]
        return f(tree)
```


Cesta mezi městy heuristickým AND/OR hledáním

- cesta mezi **Mesto1** a **Mesto2** – predikát **move(Mesto1,Mesto2,Vzdal)**.
- klíčové postavení města **Mesto3** – predikát **key(Mesto1–Mesto2,Mesto3)**.




```
move(a,b,2). move(a,c,3).  move(b,e,3).
move(b,d,2). move(c,e,1).  move(c,l,2).
move(e,k,4). move(e,l,2).  move(k,u,2).
move(k,x,3). move(u,v,5).  move(x,y,3).
move(y,z,3). move(v,z,3).  move(l,u,1).
move(d,k,1). move(u,y,2).
move(X,Y,D) :- move(Y,X,D).

stateS(a). stateS(b). stateS(c).
stateS(d). stateS(e).
stateT(u). stateT(v). stateT(x).
stateT(y). stateT(z).
border(l). border(k).

key(M1–M2,M3) :- stateS(M1), stateT(M2),
    border(M3).

city(X) :- (stateS(X);stateT(X);border(X)).
```

Cesta mezi městy heuristickým AND/OR hledáním

vlastní hledání cesty:

1. **Y1**, **Y2**,. . . klíčové body mezi městy **A** a **Z**. Hledej jednu z cest:
   - cestu z **A** do **Z** přes **Y1**
   - cestu z **A** do **Z** přes **Y2**
   - . . .
2. Není-li mezi městy **A** a **Z** klíčové město ⇒ hledej souseda **Y** města **A** takového, že existuje cesta z **Y** do **Z**.

Cesta mezi městy heuristickým AND/OR hledáním

Konstrukce příslušného AND/OR grafu:

“pravidlová” definice grafu:

```
?− op(560,xfx,via). % operátory X−Z a X−Z via Y

% a−z −−−> or:[a−z via k/0,a−z via l/0]
% a−v −−−> or:[a−v via k/0,a−v via l/0]
% ...
X−Z ---> or:Problemlist :- city(X),city(Z), bagof((X−Z via Y)/0, key(X−Z,Y), Problemlist),!.

% a−l −−−> or:[c−l/3,b−l/2]
% b−l −−−> or:[e−l/3,d−l/2]
% ...
X−Z ---> or:Problemlist :- city(X),city(Z), bagof((Y−Z)/D, move(X,Y,D), Problemlist).

% a−z via l −−−> and:[a−l/0,l−z/0]
% a−v via l −−−> and:[a−l/0,l−v/0]
% ...
X−Z via Y ---> and:[(X−Y)/0,(Y−Z)/0]:-  city(X),city(Z),key(X−Z,Y).

% goal(a−a). goal(b−b). ...
goal(X−X).
```


Cesta mezi městy heuristickým AND/OR hledáním – pokrač.

jednoduchá heuristika $h(\ X-Z \quad | \quad X-Z\ via\ Y\ )$:

- stejné město: $h = 0$ (cíl, elementární problém)
- hrana mezi X a Y **move(X,Y,C)**: $h = C$
- jinak, stejný stát: $h = 1$
- jinak, různý stát: $h = 2$

jiná možnost – *vzdušná vzdálenost*

Když $\forall n : h(n) \leq h^*(n)$, kde h^* je minimální cena řešení uzlu n ⇒ najdeme vždy optimální řešení

Cesta mezi městy heuristickým AND/OR hledáním – pokrač.

```
:- andor(a−z,SolutionTree), write(SolutionTree).
   solvedtree(a−z,11,
     solvedtree(a−z via l,11,
       and:[
         solvedtree(l−z,6,solvedtree(u−z,6,solvedtree(y−z,5,solvedleaf(z−z,3)))),
         solvedtree(a−l,5,solvedtree(c−l,5,solvedleaf(l−l,2)))]))
```