

Dekompozice problému, AND/OR grafy

Aleš Horák

E-mail: hales@fi.muni.cz
<http://nlp.fi.muni.cz/uui/>

Obsah:

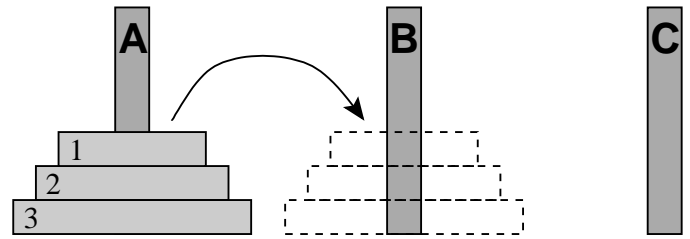
- ▶ Připomínka – průběžná písemka
- ▶ AND/OR grafy
- ▶ Prohledávání AND/OR grafů

Připomínka – průběžná písemka

- ▶ termín – **příští přednášku, 31. října, 12:00, A217**, na začátku přednášky
- ▶ náhradní termín: **není**
- ▶ příklady (formou testu – odpovědi A, B, C, D, E, z látky probrané na prvních pěti přednáškách, včetně dnešní):
 - uveden příklad v Prologu+Pythonu, otázka **Co řeší tento program?**
 - uveden příklad v Prologu+Pythonu a cíl/volání programu, otázka **Co je (návratová) hodnota výsledku?**
 - **upravte** (vyberte úpravu/doplnění) uvedený **program tak, aby...**
 - uvedeno několik **tvrzení**, potvrďte jejich pravdivost/nepravdivost
 - porovnání **vlastností** několika **algoritmů**
- ▶ rozsah: **4 příklady**
- ▶ hodnocení: **max. 32 bodů** – za *správnou odpověď* 8 bodů, za *žádnou odpověď* 0 bodů, za *špatnou odpověď* -3 body.

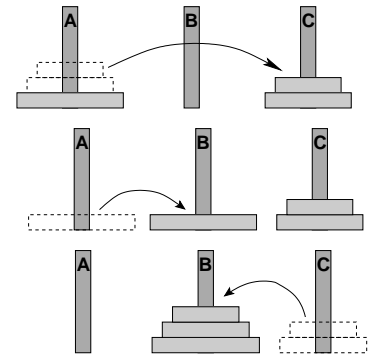
Příklad – Hanoiské věže

- ▶ máme tři tyče: **A**, **B** a **C**.
- ▶ na tyči **A** je (podle velikosti) n kotoučů.
- ▶ úkol: přeskládat z **A** pomocí **C** na tyč **B** (zaps. $n(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$) bez porušení uspořádání



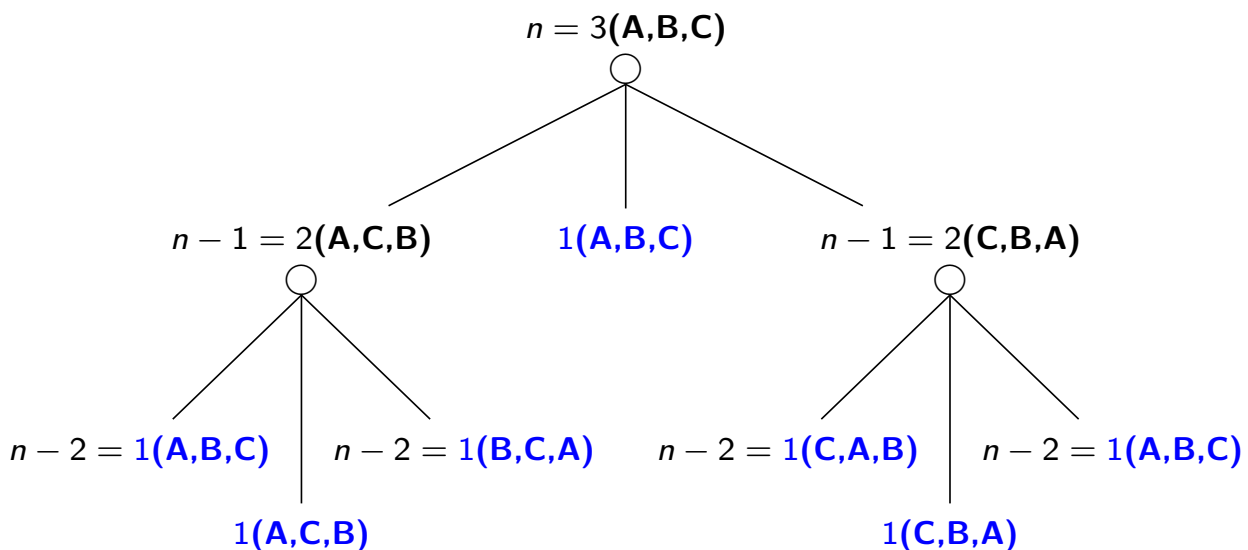
Můžeme rozložit na fáze:

1. přeskládat $n-1$ kotoučů z **A** pomocí **B** na **C**.
2. přeložit **1** kotouč z **A** na **B**
3. přeskládat $n-1$ kotoučů z **C** pomocí **A** na **B**



Příklad – Hanoiské věže – pokrač.

schéma celého řešení pro $n = 3$:



Příklad – Hanoiské věže – pokrač.

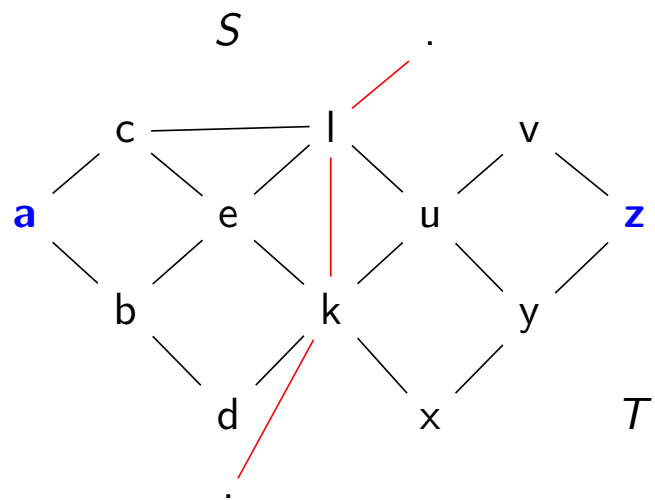
op(+Priorita, +Typ, +Jméno)**Priorita** číslo 0–1200**Typ** jedno z **xf**, **yf**, **xfx**, **xfy**, **yfx**, **yfy**, **fy** nebo **fx****Jméno** funktor nebo symbol`?-op(100,xfx,to), dynamic(hanoi/5).``hanoi(1,A,B,C,[A to B]).``hanoi(N,A,B,C,Moves) :- N>1, N1 is N-1, lemma(hanoi(N1,A,C,B,Ms1)),``hanoi(N1,C,B,A,Ms2), append(Ms1,[A to B|Ms2],Moves).``lemma(P) :- P,asserta((P :- !)).``?- hanoi(3,a,b,c,M).``M = [a to b, a to c, b to c, a to b, c to a, c to b, a to b] ;``No`

Cesta mezi městy pomocí dekompozice

města:

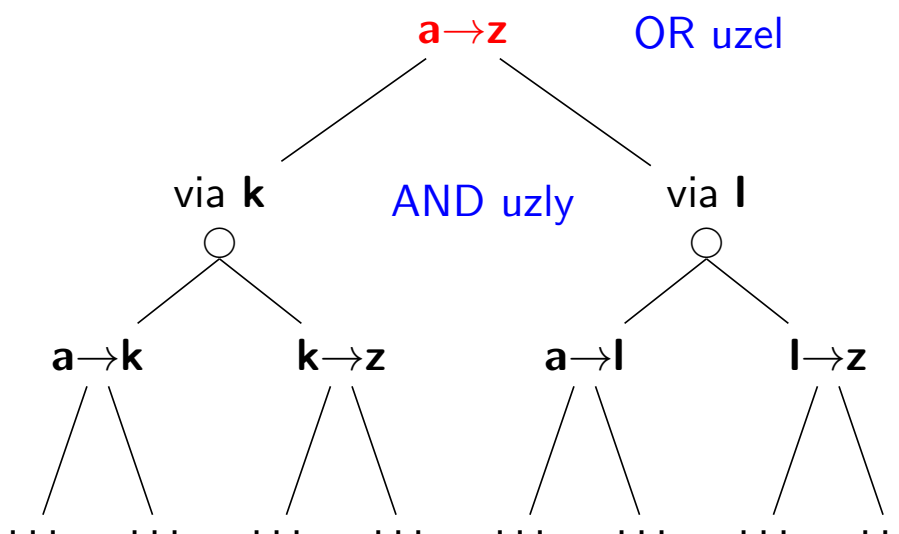
a, ..., **e** ... ve státě **S****l** a **k** ... hraniční přechody**u**, ..., **z** ... ve státě **T**hledáme cestu z **a** do **z**:

- ▶ cesta z **a** do hraničního přechodu
- ▶ cesta z hraničního přechodu do **z**



Cesta mezi městy pomocí dekompozice – pokrač.

schéma řešení pomocí rozkladu na podproblémy = AND/OR graf

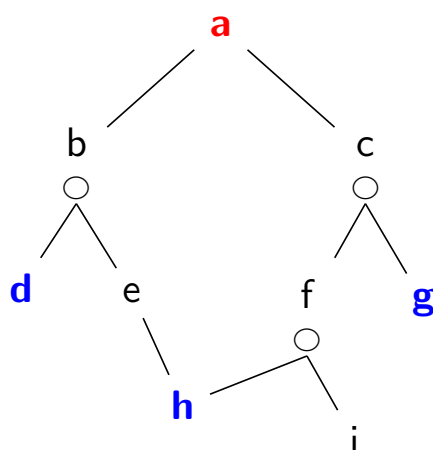


Celkové řešení = podgraf AND/OR grafu, který nevynechává žádného následníka AND-uzlu.

AND/OR graf a strom řešení

AND/OR graf = graf s 2 typy vnitřních uzlů – AND uzly a OR uzly

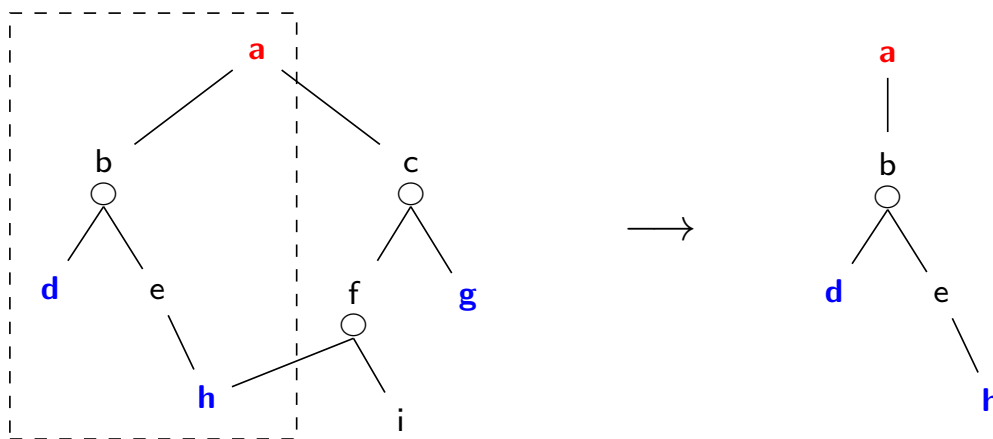
- ▶ *AND uzel* jako součást řešení vyžaduje průchod všech svých poduzlů
- ▶ *OR uzel* se chová jako běžný uzel klasického grafu



AND/OR graf a strom řešení

strom řešení T problému P s AND/OR grafem G :

- ▶ problém P je kořen stromu T
- ▶ jestliže P je OR uzel grafu $G \Rightarrow$ právě jeden z jeho následníků se svým stromem řešení je v T
- ▶ jestliže P je AND uzel grafu $G \Rightarrow$ všichni jeho následníci se svými stromy řešení jsou v T
- ▶ každý list stromu řešení T je cílovým uzlem v G

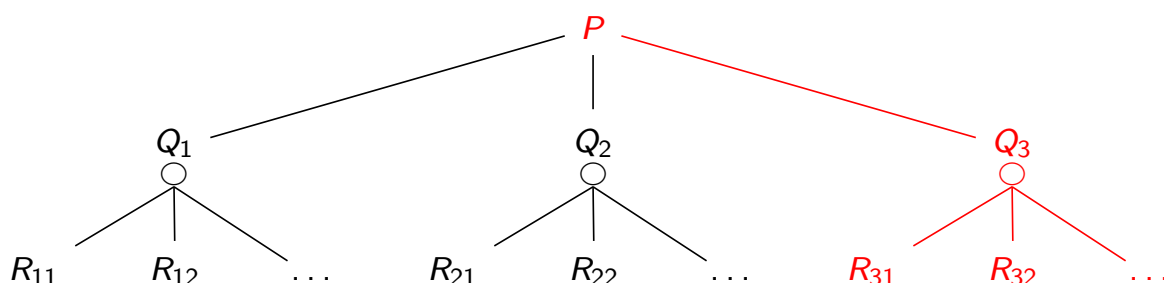


Příklad – výherní strategie

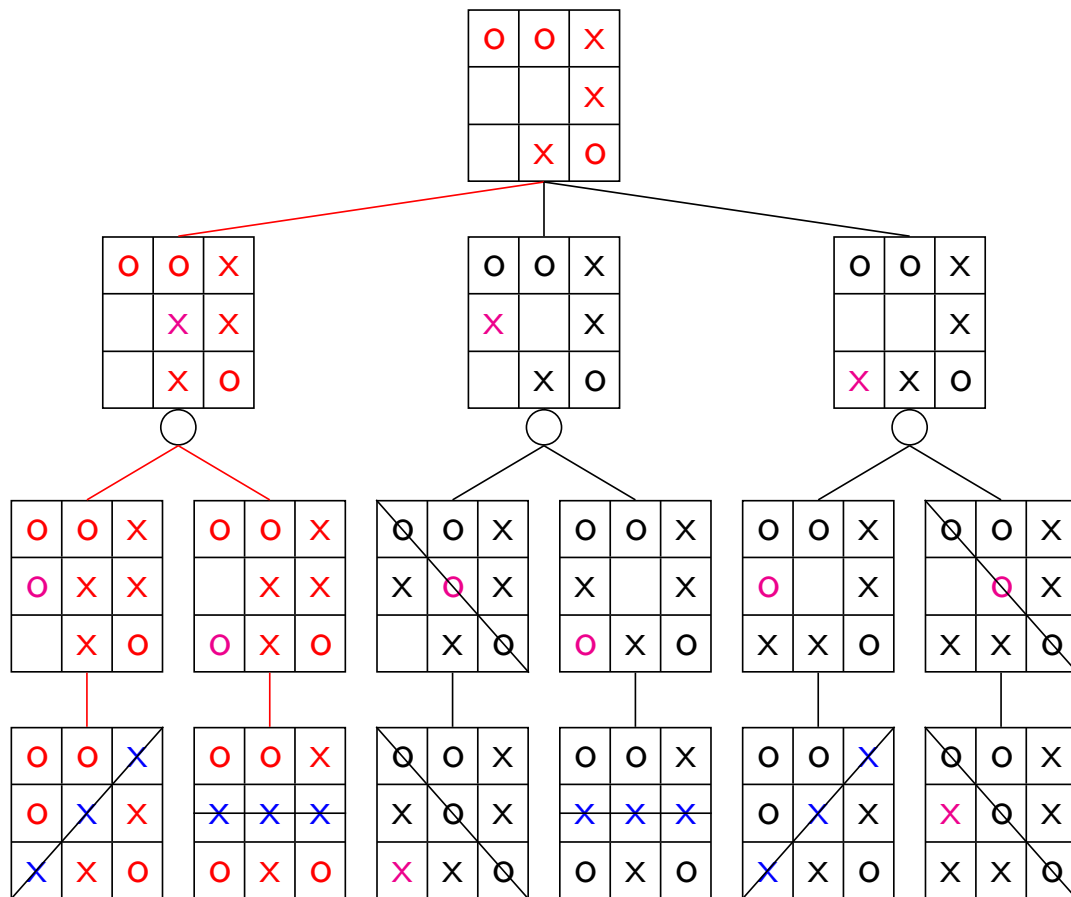
Hra 2 hráčů s perfektními znalostmi, 2 výstupy $\left\{ \begin{array}{l} \text{výhra} \\ \text{prohra} \end{array} \right.$

Výherní strategii je možné formulovat jako AND/OR graf:

- ▶ počáteční stav P typu *já-jsem-na-tahu*
- ▶ moje tahy vedou do stavů Q_1, Q_2, \dots typu *soupeř-je-na-tahu*
- ▶ následně soupeřovy tahy vedou do stavů R_{11}, R_{12}, \dots *já-jsem-na-tahu*
- ▶ cíl – stav, který je **výhra** podle pravidel (*prohra* je neřešitelný problém)
- ▶ stav P *já-jsem-na-tahu* je **výherní** \Leftrightarrow některý z Q_i je výherní, **OR**
- ▶ stav Q_i *soupeř-je-na-tahu* je **výherní** \Leftrightarrow všechny R_{ij} jsou výherní, **AND**
- ▶ **výherní strategie** = řešení AND/OR grafu



Příklad – výherní strategie



Reprezentace AND/OR grafu

přímý zápis AND/OR grafu v Prologu:

► OR uzel **v** s následníky **u1, u2, ..., uN**:

`v :- u1.`

`v :- u2.`

`...`

`v :- uN.`

► AND uzel **x** s následníky **y1, y2, ..., yM**:

`x :- y1, y2, ..., yM.`

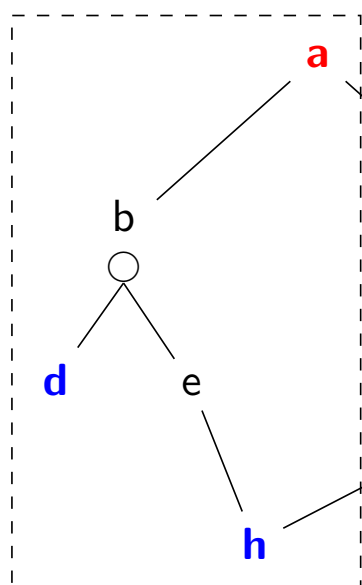
► cílový uzel **g** ($\hat{=}$ elementární problém):

`g.`

► kořenový uzel **root**:

`?- root.`

Triviální prohledávání AND/OR grafu v Prologu



```

a :- b.
a :- c.
b :- d, e.
e :- h.
c :- f, g.
f :- h, i.
d.
g.
h.

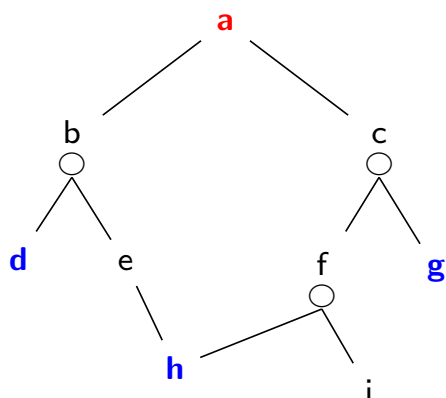
?- a.
Yes

```

Reprezentace AND/OR grafu v Prologu

► zavedeme operátory '---->' a ':'
`?- op(700, xfx, ---->).`
`?- op(500, xfx, :).`

► AND/OR graf budeme zapisovat
`a ----> or:[b, c].`
`b ----> and:[d, e].`



```

a ----> or:[b,c].
b ----> and:[d,e].
c ----> and:[f,g].
e ----> or:[h].
f ----> and:[h,i].
goal(d).
goal(g).
goal(h).

```

Prohledávání AND/OR grafu do hloubky

```

% solve(+Node, -SolutionTree)
solve(Node,Node) :- goal(Node).
solve(Node,Node ----> Tree) :-
    Node ----> or:Nodes, member(Node1,Nodes), solve(Node1,Tree).
solve(Node,Node ----> and:Trees) :-
    Node ----> and:Nodes, solveall(Nodes,Trees).

% solveall([Node1,Node2, ...], [SolutionTree1,SolutionTree2, ...])
solveall([],[]).
solveall([Node|Nodes],[Tree|Trees]) :- solve(Node,Tree), solveall(Nodes,Trees).

?- solve(a,Tree).
    Tree = a----> (b---->and:[d, e---->h]) ;
    No
  
```

Heuristické prohledávání AND/OR grafu (AO*)

- ▶ doplnění reprezentace o **cenu přechodové hrany** (=míra složitosti podproblému):

$$\text{Uzel} \text{ ----> AndOr:}[\text{NaslUzel1/Cena1}, \text{NaslUzel2/Cena2}, \dots, \text{NaslUzelN/CenaN}].$$
- ▶ definujeme **cenu uzlu** jako cenu optimálního řešení jeho podstromu
- ▶ pro každý uzel N máme daný **odhad** jeho **ceny**:

$h(N)$ = heuristický odhad ceny optimálního podgrafu s kořenem N

- ▶ pro každý uzel N , jeho následníky N_1, \dots, N_b a jeho předchůdce M definujeme:

$$F(N) = \text{cena}(M, N) + \begin{cases} h(N), & \text{pro ještě neexpandovaný uzel } N \\ 0, & \text{pro cílový uzel (elementární problém)} \\ \min_i(F(N_i)), & \text{pro OR-uzel } N \\ \sum_i F(N_i), & \text{pro AND-uzel } N \end{cases}$$

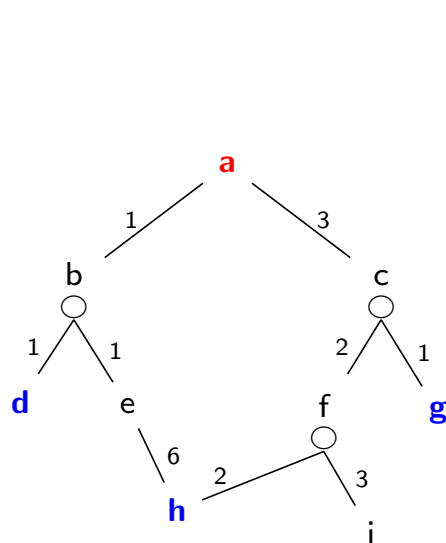
Pro **optimální strom řešení** S je tedy $F(S)$ právě cena tohoto řešení (=suma všech hran z S).

Heuristické prohledávání AND/OR grafu – příklad

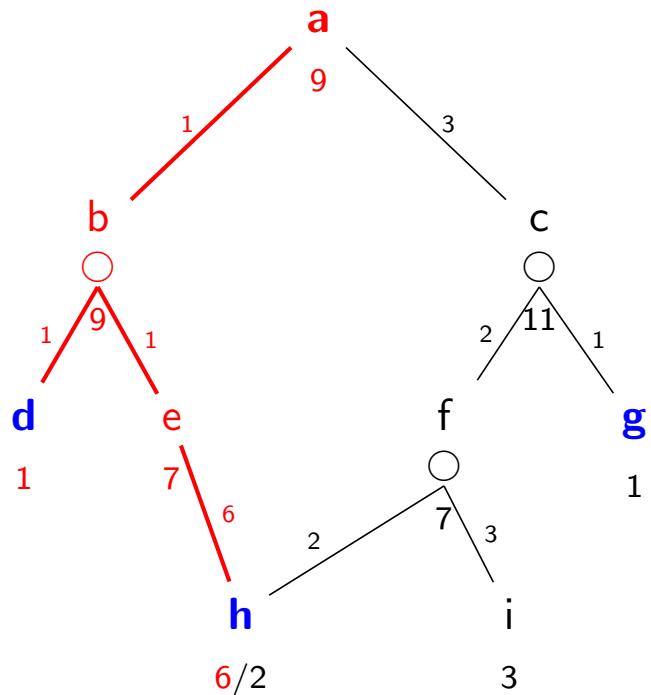
setříděný seznam částečně expandovaných grafů =

[Nevyřešený₁, Nevyřešený₂, ..., Vyřešený₁, ...]

$F_{\text{Nevyřešený}_1} \leq F_{\text{Nevyřešený}_2} \leq \dots$



předp. $\forall N : h(N) = 0$



Reprezentace AND/OR grafu při heuristickém prohledávání

F ... příslušná heuristická *F*-hodnota uzlu **N**

► **list** AND/OR grafu ... struktura **leaf(N,F,C)**

$$F = C + h(N)$$

C ... cena hrany do uzlu **N**

N ... identifikátor uzlu

► **OR uzel** AND/OR grafu ... struktura **tree(N,F,C,or:[T1,T2,T3,...])**

$$F = C + \min_i F_i$$

► **AND uzel** AND/OR grafu ... struktura **tree(N,F,C,and:[T1,T2,T3,...])**

$$F = C + \sum_i F_i$$

► **vyřešený list** AND/OR grafu ... struktura **solvedleaf(N,F)**

$$F = C$$

► **vyřešený OR uzel** AND/OR grafu ... struktura **solvedtree(N,F,T)**

$$F = C + F_1$$

► **vyřešený AND uzel** AND/OR grafu ... **solvedtree(N,F,and:[T1,T2,...])**

$$F = C + \sum_i F_i$$

Python – ("typ uzlu", n, f, ...):

("leaf", n, f, c), ("tree", n, f, c, ("or", subtrees)), ...

Heuristické prohledávání AND/OR grafu (AO*)

```
def andor(node):
```

```
    sol, solved = expand(("leaf", node, 0, 0), biggest)
```

```
    if solved == "yes": return sol
```

```
    else: raise ValueError("Reseni neexistuje.")
```

expand(tree, bound) → (newtree, solved)
expanduje tree po bound. Výsledek je newtree se stavem solved.

```
def expand(tree, bound):
```

```
    if f(tree) > bound: return (tree, "no")
```

```
    tree_type = tree[0]
```

```
    if tree_type == "leaf":
```

```
        _, node, f_, c = tree
```

```
        if is_goal(node): return (("solved_leaf", node, f_), "yes")
```

```
        tree1 = expandnode(node, c)
```

```
        if tree1 is None: return (None, "never") # neexistuji naslednici
```

```
        return expand(tree1, bound)
```

```
    elif tree_type == "tree":
```

```
        _, node, f_, c, subtrees = tree
```

```
        newsubs, solved1 = expandlist(subtrees, bound-c)
```

```
        return continue_(solved1, node, c, newsubs, bound)
```

expandlist → (newtrees, solved)
expanduje nejlepší (první) graf v seznamu trees se závorou bound. Výsledek je v seznamu newtrees a celkový stav v solved

```
def expandlist(trees, bound):
```

```
    tree, othertrees, bound1 = select_tree(trees, bound)
```

```
    newtree, solved = expand(tree, bound1)
```

```
    return combine(othertrees, newtree, solved)
```

Úvod do umělé inteligence 5/12

19 / 28

Heuristické prohledávání AND/OR grafu (AO*) – pokrač.

```
def continue_(subtr_solved, node, c, subtrees, bound):
```

```
    if subtr_solved == "never": return (None, "never")
```

```
    h_ = bestf(subtrees)
```

```
    f_ = c + h_
```

```
    if subtr_solved == "yes": return (("solved_tree", node, f_, subtrees), "yes")
```

```
    if subtr_solved == "no": return expand(("tree", node, f_, c, subtrees), bound)
```

continue → (solution, solved)
určuje, jak pokračovat po expanzi seznamu grafů

```
def combine(subtrees, tree, solved):
```

```
    op, trees = subtrees
```

```
    if op == "or":
```

```
        if solved == "yes": return (("or_result", tree), "yes")
```

```
        if solved == "no":
```

```
            newtrees = insert(tree, trees)
```

```
            return (("or", newtrees), "no")
```

```
        if solved == "never":
```

```
            if trees == Nil: return (None, "never")
```

```
            return (("or", trees), "no")
```

```
    if op == "and":
```

```
        if solved == "yes" and are_all_solved(trees):
```

```
            return (("and_result", Cons(tree, trees)), "yes")
```

```
        if solved == "never": return (None, "never")
```

```
        newtrees = insert(tree, trees)
```

```
        return (("and", newtrees), "no")
```

combine(othertrees, newtree, solved) → (newtrees, solved)
kombinuje výsledky expanze stromu a seznamu stromů

Heuristické prohledávání AND/OR grafu (AO*) – pokrač.

```
def expandnode(node, c):
    succ = get_successors(node) # podle zadaného AND/OR grafu
    if succ is None: return None
    op, successors = succ
    subtrees = evaluate(successors)
    f_ = c + bestf((op, subtrees)) # c + best h
    return ("tree", node, f_, c, (op, subtrees))
```

expandnode převede uzel z ("leaf", node, f, c) do ("tree", node, f, c, subtrees)

```
def evaluate(nodes):
    if nodes == Nil: return Nil
    node, c = nodes.head
    f_ = c + h(node)
    trees1 = evaluate(nodes.tail)
    trees = insert(("leaf", node, f_, c), trees1)
    return trees
```

evaluate vypočítá hodnoty pro seznam následovníků

```
def are_all_solved(trees):
    if trees == Nil: return True
    return is_solved(trees.head) and are_all_solved(trees.tail)
```

are_all_solved zkontroluje, jestli všechny stromy v seznamu jsou vyřešené

```
def is_solved(tree):
    tree_type = tree[0]
    return tree_type == "solved tree" or tree_type == "solved leaf"
```

Heuristické prohledávání AND/OR grafu (AO*) – pokrač.

```
def insert(t, trees):
    if trees == Nil: return Cons(t, Nil)
    t1 = trees.head
    ts = trees.tail
    if is_solved(t1): return Cons(t, trees)
    if is_solved(t): return Cons(t1, insert(t, ts))
    if f(t) <= f(t1): return Cons(t, trees)
    return Cons(t1, insert(t, ts))
```

insert vkládá strom do seznamu stromů se zachováním třídění

```
def select_tree(subtrees, bound):
    op, trees = subtrees
    if trees.tail == Nil: return (trees.head, (op, Nil), bound)
    f_ = bestf((op, trees.tail))
    if op == "or": bound1 = min(bound, f_)
    if op == "and": bound1 = bound - f_
    return (trees.head, (op, trees.tail), bound1)
```

select_tree(trees, bound) → (besttree, (op, othertrees), bound1)
vybere besttree z trees, zbytek je v othertrees. bound je závora pro trees, bound1 pro besttree

Heuristické prohledávání AND/OR grafu (AO*) – pokrač.

```
def f(tree):
```

```
    return tree[2]
```

```
def bestf(subtrees):
```

```
    op = subtrees[0]
```

```
    if op == "or":
```

```
        trees = subtrees[1]
```

```
        return f(trees.head)
```

```
    if op == "and" or op == "and_result":
```

```
        trees = subtrees[1]
```

```
        if trees == Nil: return 0
```

```
        return f(trees.head) + bestf(("and", trees.tail))
```

```
    if op == "or_result":
```

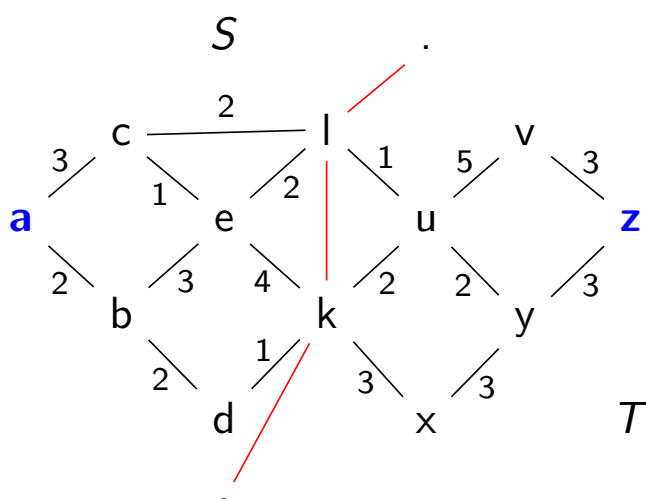
```
        tree = subtrees[1]
```

```
        return f(tree)
```

bestf vyhledá uloženou *F*-hodnotu AND/OR stromu/uzlu

Cesta mezi městy heuristickým AND/OR hledáním

- ▶ cesta mezi **Mesto1** a **Mesto2** – predikát **move(Mesto1,Mesto2,Vzdal)**.
- ▶ klíčové postavení města **Mesto3** – predikát **key(Mesto1–Mesto2,Mesto3)**.



```
move(a,b,2). move(a,c,3). move(b,e,3).
move(b,d,2). move(c,e,1). move(c,l,2).
move(e,k,4). move(e,l,2). move(k,u,2).
move(k,x,3). move(u,v,5). move(x,y,3).
move(y,z,3). move(v,z,3). move(l,u,1).
move(d,k,1). move(u,y,2).
move(X,Y,D) :- move(Y,X,D).
```

```
stateS(a). stateS(b). stateS(c).
stateS(d). stateS(e).
stateT(u). stateT(v). stateT(x).
stateT(y). stateT(z).
border(l). border(k).
```

```
key(M1–M2,M3) :- stateS(M1), stateT(M2),
border(M3).
```

```
city(X) :- (stateS(X);stateT(X);border(X)).
```

Cesta mezi městy heuristickým AND/OR hledáním

vlastní hledání cesty:

1. **Y1, Y2,...** klíčové body mezi městy **A** a **Z**. Hledej jednu z cest:
 - cestu z **A** do **Z** přes **Y1**
 - cestu z **A** do **Z** přes **Y2**
 - ...
2. Není-li mezi městy **A** a **Z** klíčové město \Rightarrow hledej souseda **Y** města **A** takového, že existuje cesta z **Y** do **Z**.

Cesta mezi městy heuristickým AND/OR hledáním

Konstrukce příslušného AND/OR grafu:

“pravidlová” definice grafu:

?- **op**(560,xfx,via). % operátory $X-Z$ a $X-Z$ via Y

% $a-z$ ----> or:[$a-z$ via $k/0$, $a-z$ via $l/0$]

% $a-v$ ----> or:[$a-v$ via $k/0$, $a-v$ via $l/0$]

% ...

$X-Z$ ---> or:Problemlist :- city(X),city(Z), bagof(($X-Z$ via Y)/0, key($X-Z$, Y), Problemlist),!

% $a-l$ ----> or:[$c-l/3$, $b-l/2$]

% $b-l$ ----> or:[$e-l/3$, $d-l/2$]

% ...

$X-Z$ ---> or:Problemlist :- city(X),city(Z), bagof(($Y-Z$)/D, move(X , Y ,D), Problemlist).

% $a-z$ via l ----> and:[$a-l/0$, $l-z/0$]

% $a-v$ via l ----> and:[$a-l/0$, $l-v/0$]

% ...

$X-Z$ via Y ---> and:[($X-Y$)/0,($Y-Z$)/0]:- city(X),city(Z),key($X-Z$, Y).

% goal($a-a$). goal($b-b$). ...

goal($X-X$).

Cesta mezi městy heuristickým AND/OR hledáním – pokrač.

jednoduchá heuristika $h(X - Z \mid X - Z \text{ via } Y)$:

- ▶ stejné město: $h = 0$ (cíl, elementární problém)
- ▶ hrana mezi X a Y $\text{move}(X, Y, C)$: $h = C$
- ▶ jinak, stejný stát: $h = 1$
- ▶ jinak, různý stát: $h = 2$

jiná možnost – *vzdušná vzdálenost*

Když $\forall n : h(n) \leq h^*(n)$, kde h^* je minimální cena řešení uzlu $n \Rightarrow$ najdeme **vždy optimální řešení**

Cesta mezi městy heuristickým AND/OR hledáním – pokrač.

`:- andor(a-z, SolutionTree), write(SolutionTree).`

`solvedtree(a-z, 11,`

`solvedtree(a-z via l, 11,`

`and:[`

`solvedtree(l-z, 6, solvedtree(u-z, 6, solvedtree(y-z, 5, solvedleaf(z-z, 3))))),`

`solvedtree(a-l, 5, solvedtree(c-l, 5, solvedleaf(l-l, 2)))))]`

