

# Učení, rozhodovací stromy, neuronové sítě

Aleš Horák

E-mail: [hales@fi.muni.cz](mailto:hales@fi.muni.cz)  
<http://nlp.fi.muni.cz/uui/>

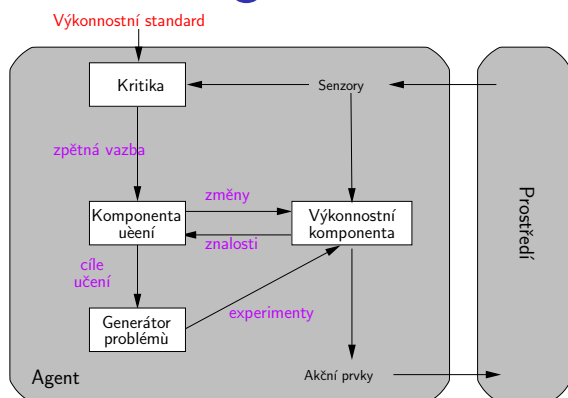
Obsah:

- ▶ Učení
- ▶ Rozhodovací stromy
- ▶ Hodnocení úspěšnosti učícího algoritmu
- ▶ Neuronové sítě

## Učení

- ▶ **učení** je klíčové pro neznámé prostředí (kde návrhář není vševědoucí)
- ▶ učení je také někdy vhodné jako **metoda konstrukce** systému – vystavit agenta realitě místo přepisování reality do pevných pravidel
- ▶ učení agenta – využití jeho **vjemů** z prostředí nejen pro vyvození další akce
- ▶ učení **modifikuje rozhodovací systém** agenta pro zlepšení jeho výkonnosti

# Učící se agent



příklad automatického taxi:

- ▶ **Výkonnostní komponenta** – obsahuje znalosti a postupy pro výběr akcí pro vlastní řízení auta
- ▶ **Kritika** – sleduje reakce okolí na akce taxi. Např. při rychlém přejetí 3 podélných pruhů zaznamená a předá pohoršující reakce dalších řidičů
- ▶ **Komponenta učení** – z hlášení Kritiky vyvodí nové pravidlo, že takové přejíždění je nevhodné, a modifikuje odpovídajícím způsobem Výkonnostní komponentu
- ▶ **Generátor problémů** – zjišťuje, které oblasti by mohly potřebovat vylepšení a navrhuje experimenty, jako je třeba brždění na různých typech vozovky

## Komponenta učení

**návrh komponenty učení** závisí na několika attributech:

- jaký typ **výkonnostní komponenty** je použit
- která funkční **část** výkonnostní komponenty má být **učena**
- jak je tato funkční část **reprezentována**
- jaká **zpětná vazba** je k dispozici

výkonnostní komponenta	funkční část	reprezentace	zpětná vazba
Alfa-beta prohledávání	vyhodnocovací funkce	vážená lineární funkce	výhra/prohra
Logický agent	určení akce	axiomy <i>Result</i>	výsledné skóre
Reflexní agent	váhy perceptronu	neuronová síť	správná/špatná akce

učení **s dohledem** (*supervised learning*) × **bez dohledu** (*unsupervised learning*)

- ▶ s dohledem – učení **funkce** z příkladů vstupů a výstupů
- ▶ bez dohledu – učení **vzorů** na vstupu vzhledem k reakcím prostředí
- ▶ posílené (*reinforcement learning*) – nejobecnější, agent se učí podle **odměn/pokut**

# Induktivní učení

známé taky jako **věda** 😊

nejjednodušší forma – učení funkce z příkladů (agent je **tabula rasa**)  
 $f$  je cílová funkce

každý **příklad** je dvojice  $x, f(x)$  např.

0	0	×
×	×	×

, +1

úkol **indukce**:

najdi **hypotézu**  $h$

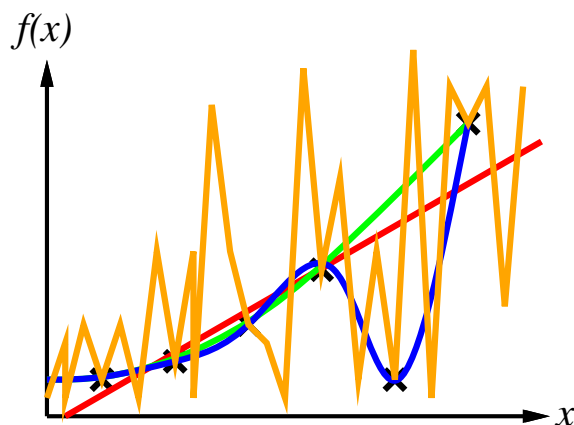
takovou, že  $h \approx f$

pomocí sady **trénovacích příkladů**

## Metoda induktivního učení

zkonstruuji/uprav  $h$ , aby souhlasila s  $f$  na trénovacích příkladech  
 $h$  je **konzistentní**  $\Leftrightarrow$  souhlasí s  $f$  na všech příkladech

např. hledání křivky:

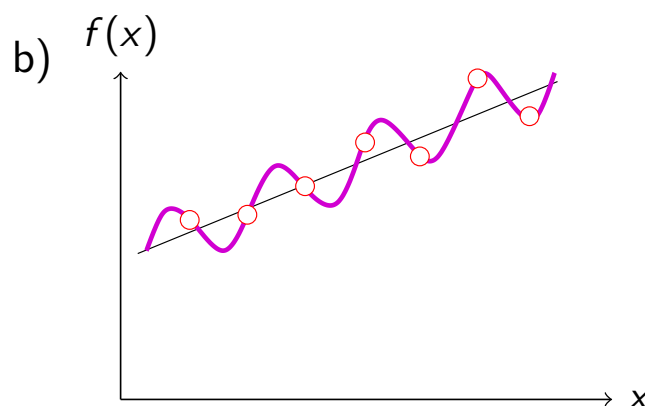
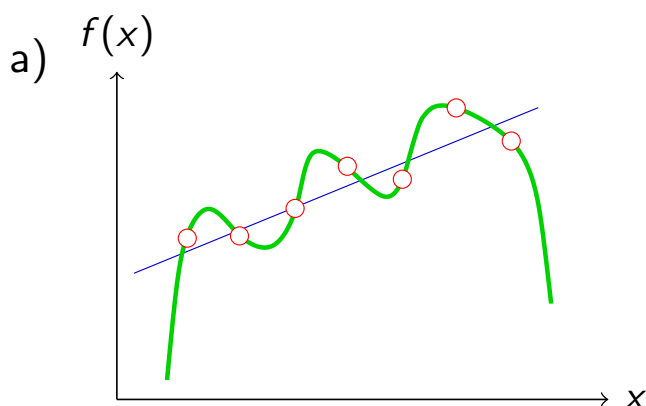


pravidlo **Ockhamovy břitvy** – maximalizovat kombinaci konzistence a jednoduchosti (*nejjednodušší ze správných je nejlepší*)

## Metoda induktivního učení pokrač.

hodně záleží na **prostoru hypotéz**, jsou na něj protichůdné požadavky:

- pokrýt co **největší množství** hledaných funkcí
- udržet **nízkou výpočetní složitost** hypotézy



- stejná sada 7 bodů
- nejmenší konzistentní polynom – polynom 6-tého stupně (7 parametrů)
- může být výhodnější použít nekonzistentní **přibližnou** lineární funkci
- přitom existuje konzistentní funkce  $ax + by + c \sin x$

## Atributová reprezentace příkladů

**příklady** popsané výčtem **hodnot atributů** (libovolných hodnot)

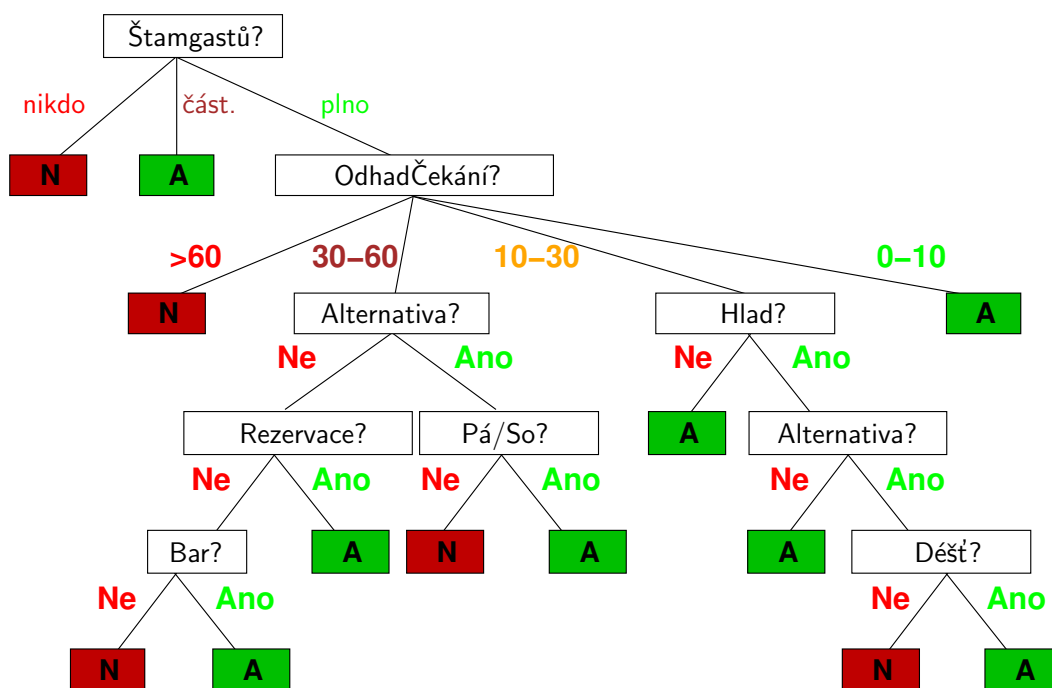
např. rozhodování, zda **počkat na uvolnění stolu v restauraci**:

Příklad	Atributy										počkat?
	<i>Alt</i>	<i>Bar</i>	<i>Pá/So</i>	<i>Hlad</i>	<i>Štam</i>	<i>Cen</i>	<i>Děšť'</i>	<i>Rez</i>	<i>Typ</i>	<i>ČekD</i>	
$X_1$	A	N	N	A	část.	\$\$\$	N	A	mexická	0–10	A
$X_2$	A	N	N	A	plno	\$	N	N	asijská	30–60	N
$X_3$	N	A	N	N	část.	\$	N	N	bufet	0–10	A
$X_4$	A	N	A	A	plno	\$	N	N	asijská	10–30	A
$X_5$	A	N	A	N	plno	\$\$\$	N	A	mexická	>60	N
$X_6$	N	A	N	A	část.	\$\$	A	A	pizzerie	0–10	A
$X_7$	N	A	N	N	nikdo	\$	A	N	bufet	0–10	N
$X_8$	N	N	N	A	část.	\$\$	A	A	asijská	0–10	A
$X_9$	N	A	A	N	plno	\$	A	N	bufet	>60	N
$X_{10}$	A	A	A	A	plno	\$\$\$	N	A	pizzerie	10–30	N
$X_{11}$	N	N	N	N	nikdo	\$	N	N	asijská	0–10	N
$X_{12}$	A	A	A	A	plno	\$	N	N	bufet	30–60	A

Ohodnocení tvoří **klasifikaci** příkladů – **pozitivní** (A) a **negativní** (N)

# Rozhodovací stromy

jedna z možných reprezentací hypotéz – rozhodovací strom pro určení, jestli počkat na stůl:



## Vyjadřovací síla rozhodovacích stromů

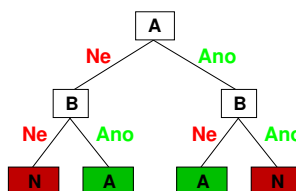
rozhodovací stromy vyjádří libovolnou Booleovskou funkci vstupních atributů → odpovídá výrokové logice

$$\forall s \text{ počkat?}(s) \Leftrightarrow (P_1(s) \vee P_2(s) \vee \dots \vee P_n(s)),$$

kde  $P_i(s) = (A_1(s) = V_1 \wedge \dots \wedge A_m(s) = V_m)$

pro libovolnou Booleovskou funkci → řádek v pravdivostní tabulce = cesta ve stromu (od kořene k listu)

A	B	A xor B
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F



triviálně

*pro libovolnou trénovací sadu existuje konzistentní rozhodovací strom s jednou cestou k listům pro každý příklad*

## Prostor hypotéz

1. vezměme pouze Booleovské atributy, bez dalšího omezení  
 Kolik existuje různých rozhodovacích stromů s  $n$  Booleovskými atributy?  
 = počet všech Booleovských funkcí nad těmito atributy  
 = počet různých pravdivostních tabulek s  $2^n$  řádky =  $2^{2^n}$   
 např. pro 6 atributů existuje 18 446 744 073 709 551 616 různých rozhodovacích stromů
2. když se omezíme pouze na konjunktivní hypotézy ( $Hlad \wedge \neg D\acute{e}št'$ )  
 Kolik existuje takových čistě konjunktivních hypotéz?  
 každý atribut může být v pozitivní nebo negativní formě nebo nepoužit  
 $\Rightarrow 3^n$  různých konjunktivních hypotéz (pro 6 atributů = 729)

**prostor** hypotéz s větší **expresivitou**

- zvyšuje šance, že najdeme přesné vyjádření cílové funkce
- ALE zvyšuje i počet možných hypotéz, které jsou konzistentní s trénovací množinou  
 $\Rightarrow$  můžeme získat nižší kvalitu předpovědí (generalizace)

## Učení ve formě rozhodovacích stromů

### ► triviální konstrukce rozhodovacího stromu

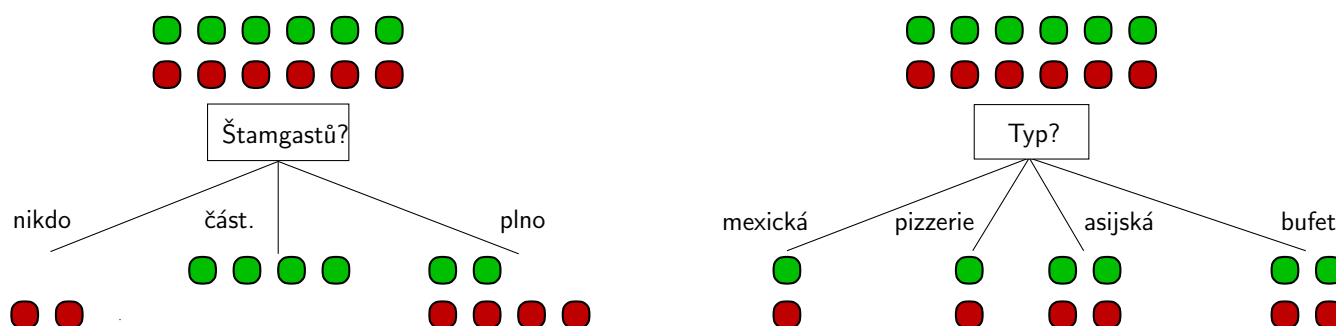
- pro každý příklad v trénovací sadě přidej jednu cestu od kořene k listu
- na stejných příkladech jako v trénovací sadě bude fungovat přesně
- na nových příkladech se bude chovat náhodně – **negeneralizuje** vzory z příkladů, pouze **kopíruje** pozorování

### ► heuristická konstrukce kompaktního stromu

- chceme najít **nejmenší** rozhodovací strom, který souhlasí s příklady
- přesné nalezení nejmenšího stromu je ovšem příliš složité  
 $\rightarrow$  heuristikou najdeme alespoň **dostatečně malý**
- hlavní myšlenka – vybíráme atributy pro test v co **nejlepším pořadí**

## Výběr atributu

**dobrý atribut**  $\equiv$  rozdělí příklady na podmnožiny, které jsou (nejlépe) “všechny pozitivní” nebo “všechny negativní”



*Štamgastů?* je lepší volba atributu  $\leftarrow$  dává lepší **informaci** o vlastní **klasifikaci** příkladů

## Výběr atributu – míra informace

**informace** – odpovídá na **otázku**

čím **méně** dopředu vím o výsledku obsaženém v odpovědi  $\rightarrow$  tím **více** informace je v ní obsaženo

měřítko: **1 bit** = odpověď na Booleovskou otázku s pravděpodobností odpovědi  $\langle P(T) = \frac{1}{2}, P(F) = \frac{1}{2} \rangle$

$n$  možných odpovědí  $\langle P(v_1), \dots, P(v_n) \rangle \rightarrow$  **míra informace** v odpovědi obsažená

$$I(\langle P(v_1), \dots, P(v_n) \rangle) = \sum_{i=1}^n -P(v_i) \log_2 P(v_i)$$

tato míra se také nazývá **entropie**

např. pro házení mincí:  $I(\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle) = -\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$  bit

pro házení *falešnou* mincí, která dává na 99% vždy jednu stranu mince:

$$I(\langle \frac{1}{100}, \frac{99}{100} \rangle) = -\frac{1}{100} \log_2 \frac{1}{100} - \frac{99}{100} \log_2 \frac{99}{100} = 0.08 \text{ bitů}$$

## Použití míry informace pro výběr atributu

předpokládejme, že máme  $p$  pozitivních a  $n$  negativních příkladů

$\Rightarrow I(\langle \frac{p}{p+n}, \frac{n}{p+n} \rangle)$  bitů je potřeba pro klasifikaci nového příkladu

např. pro  $X_1, \dots, X_{12}$  z volby čekání na stůl je  $p = n = 6$ , takže potřebujeme 1 bit

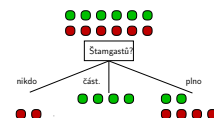
**výběr atributu** – kolik informace nám dá test na hodnotu atributu  $A$ ?

= rozdíl odhadu odpovědi před a po testu atributu

## Použití míry informace pro výběr atributu

atribut  $A$  rozdělí sadu příkladů  $E$  na podmnožiny  $E_i$

(nejlépe tak, že každá potřebuje méně informace)



nechť  $E_i$  má  $p_i$  pozitivních a  $n_i$  negativních příkladů

$\Rightarrow$  je potřeba  $I(\langle \frac{p_i}{p_i+n_i}, \frac{n_i}{p_i+n_i} \rangle)$  bitů pro klasifikaci nového příkladu

$\Rightarrow$  očekávaný počet bitů celkem je  $Remainder(A) = \sum_i \frac{p_i+n_i}{p+n} \cdot I(\langle \frac{p_i}{p_i+n_i}, \frac{n_i}{p_i+n_i} \rangle)$

$\Rightarrow$  výsledný zisk atributu  $A$  je  $Gain(A) = I(\langle \frac{p}{p+n}, \frac{n}{p+n} \rangle) - Remainder(A)$

**výběr atributu** = nalezení atributu s nejvyšší hodnotou  $Gain(A)$

$Gain(\text{Štamgastů?}) \approx 0.541$  bitů

$Gain(\text{Typ?}) = 0$  bitů

obecně:  $E_i$  (pro  $A = v_i$ ) obsahuje  $c_{i,k}$  klasifikací do tříd  $c_1, \dots, c_k$

$\Rightarrow Remainder(A) = \sum_i P(v_i) \cdot I(\langle P(c_{i,1}), \dots, P(c_{i,k}) \rangle)$

$\Rightarrow Gain(A) = I(\langle P(v_1), \dots, P(v_n) \rangle) - Remainder(A)$



## Algoritmus IDT – učení formou rozhodovacích stromů

```

def induce_tree(attributes, examples):
    if examples == Nil: return None
    example = examples.head
    class_, _ = example
    other_class = False
    for example1 in member_anyX(examples):
        classX, _ = example1
        if classX != class_:
            other_class = True
            break
    if other_class is False: return ("leaf", class_) # ∀ příklady stejné třídy
    attribute, _ = choose_attribute(attributes, examples)
    if attribute is None: # žádný užitečný atribut, list s distribucí klasifikací
        exclasses = get_example_classes(examples)
        return ("leaf", exclasses)
    rest_atts = dele(attribute, attributes)
    values = get_attribute_values(attribute)
    subtrees = induce_trees(attribute, values, rest_atts, examples)
    return ("tree", attribute, subtrees)

```

## Algoritmus IDT – učení formou rozhodovacích stromů

```

def induce_trees(att, vals, rest_atts, exs): # SubTrees podle hodnot atributu Att
    if vals is Nil: return Nil # žádné atributy → žádné podstromy
    val1 = vals.head
    example_subset = attval_subset(att, val1, exs)
    tree1 = induce_tree(rest_atts, example_subset)
    trees = induce_trees(att, vals.tail, rest_atts, exs)
    return Cons((val1, tree1), trees)

def attval_subset(attribute, value, examples): # vybere příklady, kde Attribute = Value
    return filter_examples(examples, None, attribute, value)

def choose_attribute(attrs, examples): # výběr nejlepšího atributu
    if attrs == Nil: return (None, 0)
    att = attrs.head
    if attrs.tail == Nil:
        gain_ = gain(examples, att)
        return (att, gain_)
    best_att1, best_gain1 = choose_attribute(attrs.tail, examples)
    gain_ = gain(examples, att)
    if gain_ > best_gain1: return (att, gain_)
    return (best_att1, best_gain1)

```

# Algoritmus IDT – učení formou rozhodovacích stromů

```

def gain(exs, att): # zisk atributu
    att_vals = get_attribute_values(att)
    total = length(exs)
    classes = get_example_classes(exs)
    ccnts = cnt_classes(classes, exs)
    i = info(ccnts, total)
    rem_ = rem(att, att_vals, exs, classes, total)
    gain_ = i - rem_
    return gain_

def info(value_counts, total): # míra informace  $I(\langle P(v_1), \dots, P(v_n) \rangle) = \sum_{i=1}^n -P(v_i) \log_2 P(v_i)$ 
    if value_counts == Nil: return 0
    vc = value_counts.head
    i1 = info(value_counts.tail, total)
    if vc == 0: return i1
    pvi = vc / total
    return -pvi * math.log(pvi, 2) + i1

def rem(att, vs, exs, classes, total): # "zbytková informace" po testu na Att
    if vs == Nil: return 0
    v = vs.head
    nv = length(filter_examples(exs, None, att, v))
    vcnts = cnt_classes_attv(att, v, classes, exs)
    pv = nv / total
    i = info(vcnts, nv)
    rem1 = rem(att, vs.tail, exs, classes, total)

```

# Algoritmus IDT – učení formou rozhodovacích stromů

```

def cnt_classes(classes, exs): # kolik příkladů má každá třída ze seznamu?
    if classes == Nil:
        return Nil
    c = classes.head
    nc = cnt_class(c, exs)
    ncs = cnt_classes(classes.tail, exs)
    return Cons(nc, ncs)

def cnt_class(class_, exs): # kolik příkladů má danou třídu?
    count = 0
    for example in member_anyX(exs):
        class1, _ = example
        if class1 == class_:
            count = count + 1
    return count

def cnt_classes_attv(att, val, classes, exs): # počty příkladů každé třídy s Att = Val
    if classes == Nil: return Nil
    c = classes.head
    nc = cnt_class_attv(att, val, c, exs)
    ncs = cnt_classes_attv(att, val, classes.tail, exs)
    return Cons(nc, ncs)

def cnt_class_attv(att, val, class_, exs): # počet příkladů třídy Class s Att = Val
    return length(filter_examples(exs, class_, att, val))

```

# Algoritmus IDT – učení formou rozhodovacích stromů

```
def get_example_classes(examples): # vrátí kategorie příkladů
    if examples == Nil: return Nil
    example = examples.head
    class_, _ = example
    other_classes = get_example_classes(examples.tail)
    if not member(class_, other_classes):
        return Cons(class_, other_classes)
    return other_classes

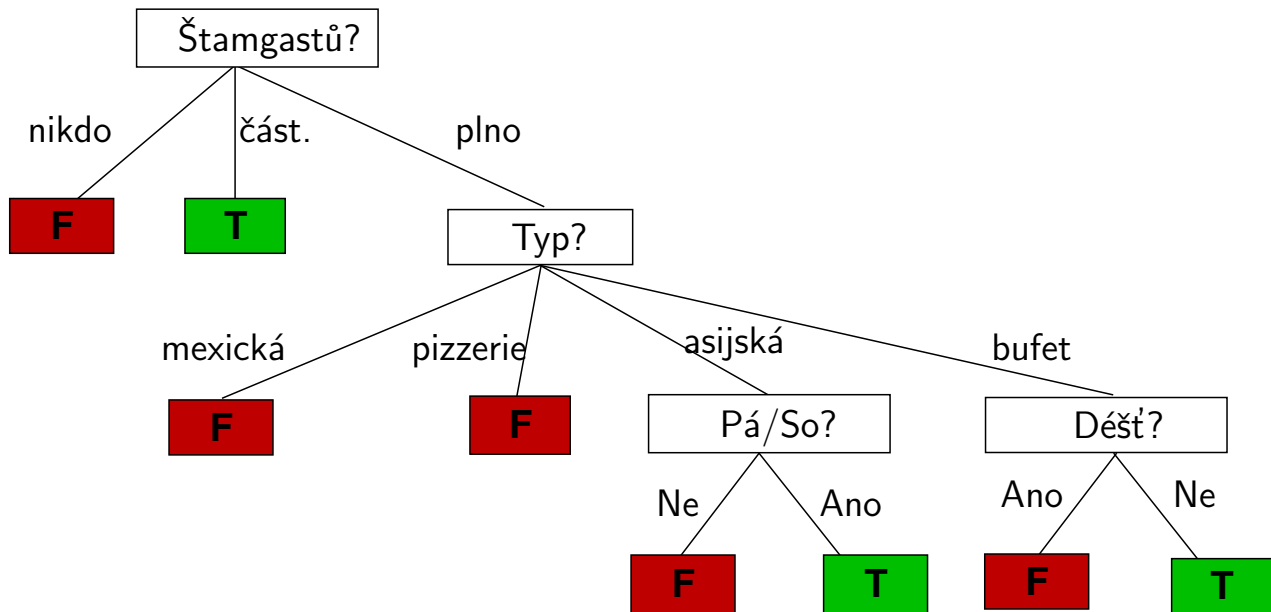
# filtruj příklady podle hodnoty atributu a volitelně i podle třídy výstupu
def filter_examples(examples, class_, attribute, value):
    if examples == Nil: return Nil
    example = examples.head
    class1, obj = example
    other_examples = filter_examples(examples.tail, class_, attribute, value)
    if class_ is None or class_ == class1:
        if member((attribute, value), obj): return Cons(example, other_examples)
    return other_examples
```

## Algoritmus IDT – příklad

```
attribute_dict = dict( hlad=LinkedList(["ano", "ne"]),
                      stam=LinkedList(["nikdo", "cast", "plno"]),
                      cen=LinkedList(["$", "$$", "$$$"]), ...
example_list = LinkedList([
    ("pockat", LinkedList([
        ("alt", "ano"), ("bar", "ne"), ("paso", "ne"), ("hlad", "ano"), ("stam", "cast"),
        ("cen", "$$$"), ("dest", "ne"), ("rez", "ano"), ("typ", "mexicka") ])),
    ("necekat", LinkedList([
        ("alt", "ano"), ("bar", "ne"), ("paso", "ne"), ("hlad", "ano"), ("stam", "plno"),
        ("cen", "$"), ("dest", "ne"), ("rez", "ne"), ("typ", "asijska") ])), ...
print_tree(induce_tree(attribute_dict.keys(), example_list))
stam?
= nikdo
  necekat
= cast
  pockat
= plno
  hlad?
  = ano
    cen?
    = $
      paso?
      = ano
        pockat
        = ne
          necekat
          = $$$
            necekat
            = ne
```

# IDT – výsledný rozhodovací strom

rozhodovací strom **naučený** z 12-ti příkladů:



podstatně jednodušší než strom “z tabulky příkladů”

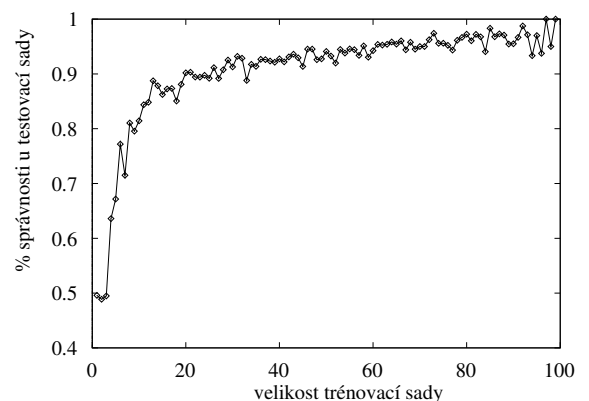
## Hodnocení úspěšnosti učícího algoritmu

jak můžeme zjistit, zda  $h \approx f$ ? } dopředu – použít věty Teorie počítačného učení  
 po naučení – kontrolou na **jiné trénovací sadě**

používaná **metodologie** (cross validation):

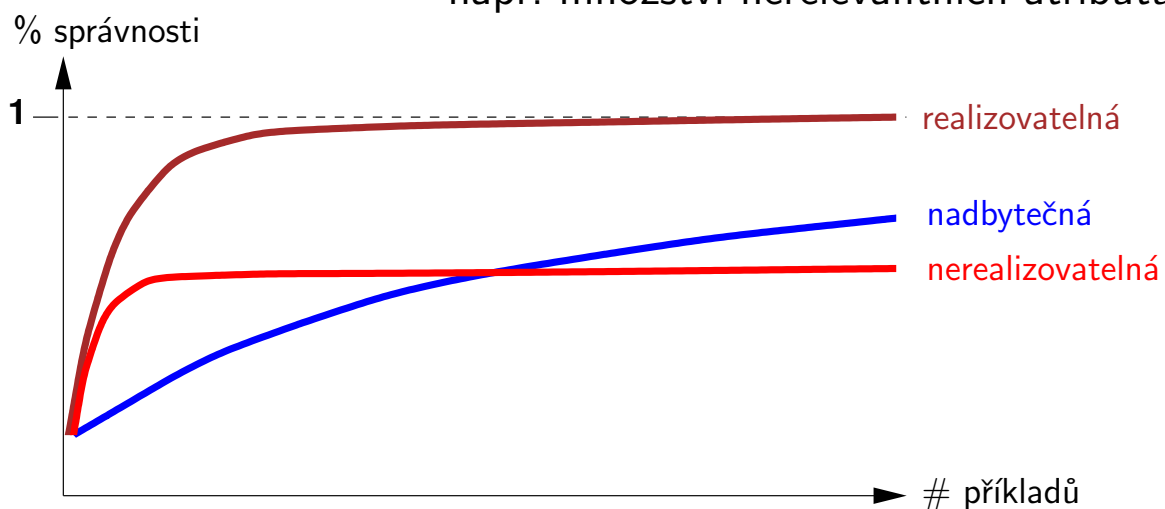
1. vezmeme velkou množinu příkladů
2. rozdělíme ji na 2 množiny – **trénovací** a **testovací**
3. aplikujeme učící algoritmus na **trénovací** sadu, získáme hypotézu  $h$
4. **změříme** procento příkladů v **testovací** sadě, které jsou správně klasifikované hypotézou  $h$
5. opakujeme kroky 2–4 pro různé velikosti trénovacích sad a pro náhodně vybrané trénovací sady

**křivka učení** – závislost velikosti trénovací sady na úspěšnosti



## Hodnocení úspěšnosti učícího algoritmu – pokrač.

- tvar křivky učení závisí na
- ▶ je hledaná funkce realizovatelná × nerealizovatelná
    - funkce může být nerealizovatelná kvůli
      - chybějícím atributům
      - omezenému prostoru hypotéz
  - ▶ naopak nadbytečné expresivitě
    - např. množství nerelevantních atributů



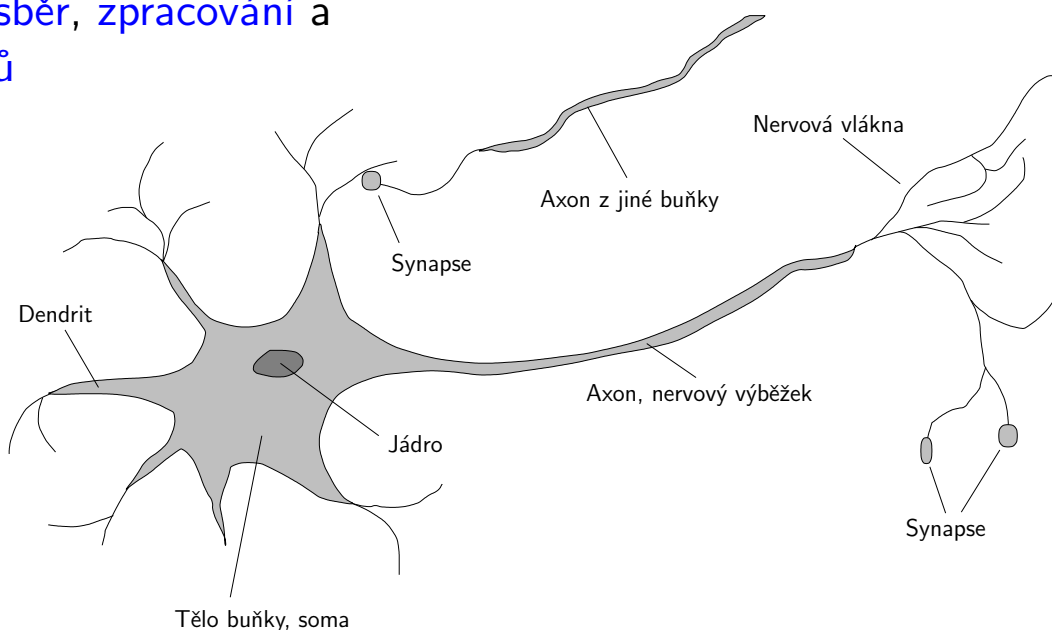
## Induktivní učení – shrnutí

- ▶ **učení** je potřebné pro **neznámé prostředí** (a líné analytiky 😊)
- ▶ **učící se agent** – **výkonnostní komponenta** a **komponenta učení**
- ▶ **metoda** učení závisí na **typu výkonnostní komponenty**, dostupné **zpětné vazbě**, **typu** a **reprezentaci** části, která se má učením zlepšit
- ▶ u **učení s dohledem** – cíl je najít nejjednodušší hypotézu přibližně konzistentní s trénovacími příklady
- ▶ učení formou **rozhodovacích stromů** používá **míru informace**
- ▶ **kvalita učení** – přesnost odhadu změřená na testovací sadě

# Neuron

**mozek** –  $10^{11}$  neuronů  $> 20$  typů,  $10^{14}$  synapsí, 1ms–10ms cyklus  
nosiče informace – **signály** = “výkyvy” elektrických potenciálů (se šumem)

**neuron** – mozková buňka, která  
má za úkol **sběr**, **zpracování** a  
**šíření signálů**



## Počítačový model – neuronové sítě

1943 – McCulloch & Pitts – matematický **model** neuronu  
spojené do **neuronové sítě** – schopnost **tolerovat šum** ve vstupu a **učit se**

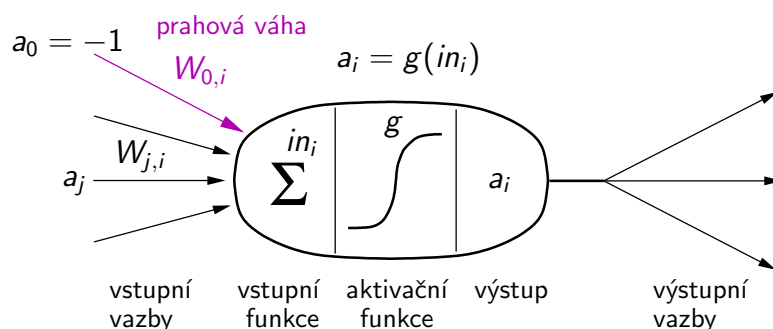
**jednotky** v neuronové síti – jsou propojeny **vazbami** (*links*)  
(*units*)

- vazba z jednotky  $j$  do  $i$  propaguje **aktivaci**  $a_j$  jednotky  $j$
- každá vazba má číselnou **váhu**  $W_{j,i}$  (síla+znaménko)

funkce jednotky  $i$ :

1. spočítá váženou  $\sum$  vstupů =  $in_i$
2. aplikuje **aktivační funkci**  $g$
3. tím získá **výstup**  $a_i$

$$a_i = g(in_i) = g\left(\sum_j W_{j,i} a_j\right)$$

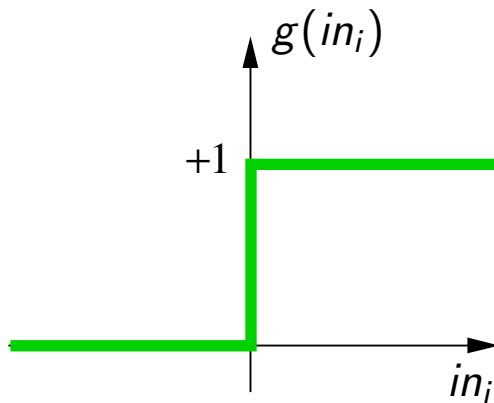


# Aktivační funkce

- účel **aktivační funkce**: ▶ jednotka má být **aktivní** ( $\approx +1$ ) pro pozitivní příklady, jinak **neaktivní**  $\approx 0$
- ▶ aktivace musí být **nelineární**, jinak by celá síť byla lineární

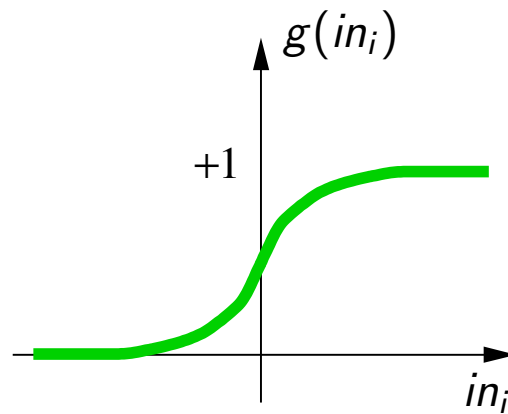
např.

a)



prahová funkce

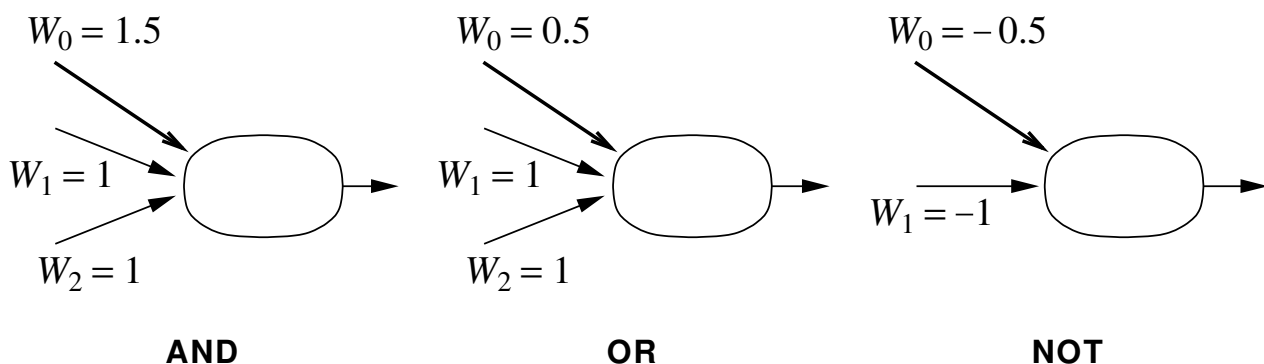
b)



sigmoida  $1/(1 + e^{-x})$   
je derivovatelná – důležité pro **učení**

změny **prahové váhy**  $W_{0,i}$  nastavují nulovou pozicí – nastavují **práh** aktivace

## Logické funkce pomocí neuronové jednotky



jednotka McCulloch & Pitts sama umí implementovat **základní Booleovské funkce**

⇒ kombinacemi jednotek do sítě můžeme implementovat **libovolnou Booleovskou funkci**

# Struktury neuronových sítí

## ► síť s předním vstupem (*feed-forward networks*)

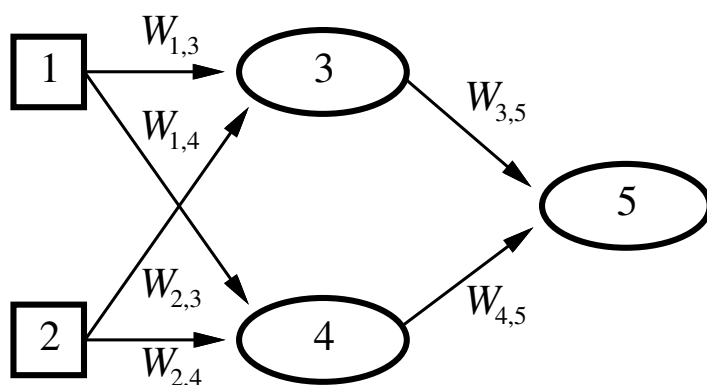
- necyklické
- implementují funkce
- nemají vnitřní paměť

## ► rekurentní síť (*recurrent networks*)

- cyklické
- vlastní výstup si berou opět na vstup
- složitější a schopnější
- výstup má (zpožděný) vliv na aktivaci = **paměť**
- **Hopfieldovy sítě** – symetrické obousměrné vazby; fungují jako *asociativní paměť*
- **Boltzmannovy stroje** – pravděpodobnostní aktivační funkce
- **Long Short Term Memory (LSTM)** – spojují vzdálené závislosti v sekvenci vstupu

## Příklad sítě s předním vstupem

síť 5-ti jednotek – 2 vstupní jednotky, 1 skrytá vrstva (2 jednotky), 1 výstupní jednotka



síť s předním vstupem = **parametrizovaná** nelineární funkce vstupu

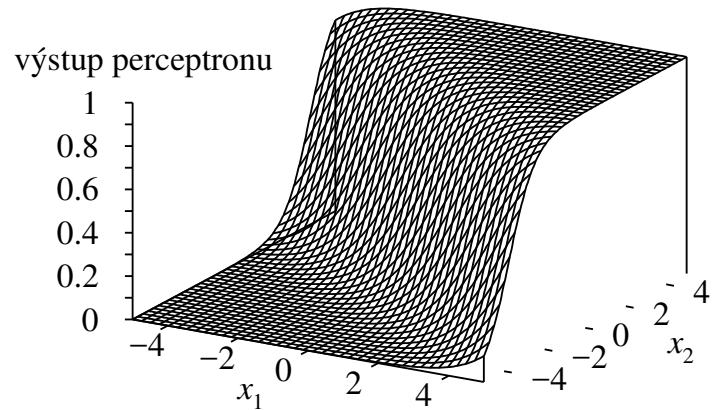
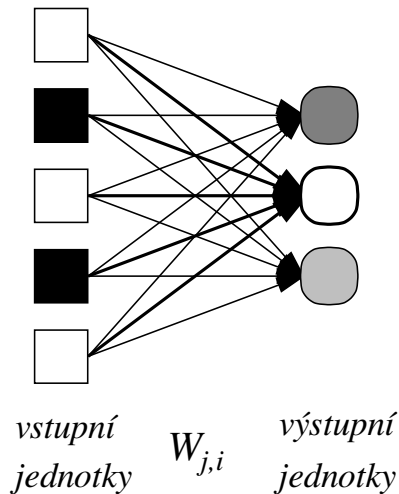
$$\begin{aligned}
 a_5 &= g(W_{3,5} \cdot a_3 + W_{4,5} \cdot a_4) \\
 &= g(W_{3,5} \cdot g(W_{1,3} \cdot a_1 + W_{2,3} \cdot a_2) + W_{4,5} \cdot g(W_{1,4} \cdot a_1 + W_{2,4} \cdot a_2))
 \end{aligned}$$



# Jednovrstvá síť – perceptron

## perceptron

- pro Booleovskou funkci 1 výstupní jednotka
- pro složitější klasifikaci – **více výstupních jednotek**

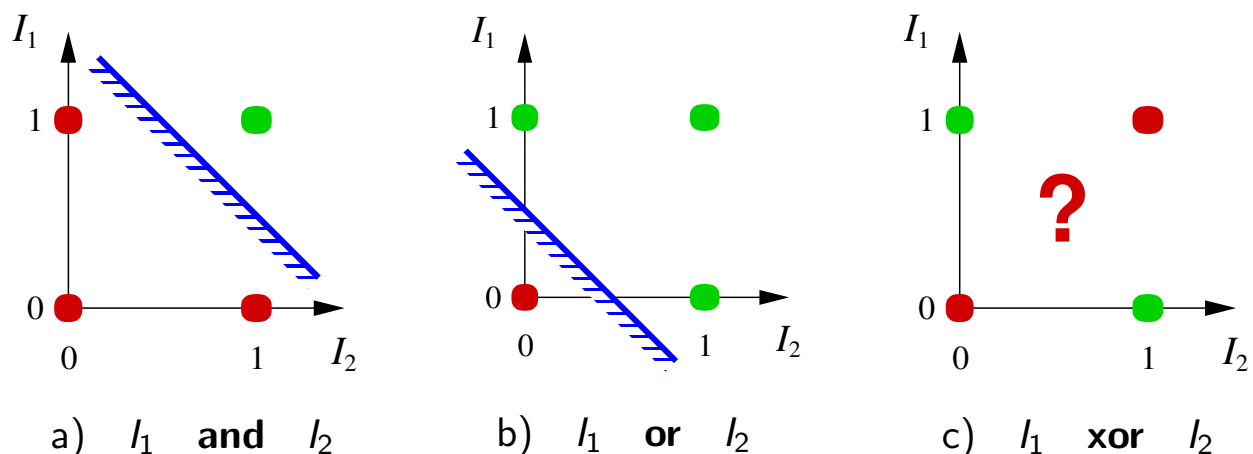


## Vyjadřovací síla perceptronu

**perceptron** může reprezentovat hodně Booleovských funkcí – AND, OR, NOT, majoritní funkci, ...

$$\sum_j W_j x_j > 0 \quad \text{nebo} \quad \mathbf{W} \cdot \mathbf{x} > 0$$

reprezentuje **lineární separátor** (nádřovina) v prostoru vstupu:



## Učení perceptronu

**výhoda** perceptronu – existuje jednoduchý **učící algoritmus** pro libovolnou lineárně separabilní funkci

**učení perceptronu** = upravování vah, aby se **snížila chyba** na trénovací sadě

**kvadratická chyba**  $E$  pro příklad se vstupem  $\mathbf{x}$  a požadovaným (=správným) výstupem  $y$  je

$$E = \frac{1}{2} \text{Err}^2 \equiv \frac{1}{2} (y - h_{\mathbf{W}}(\mathbf{x}))^2, \quad \text{kde } h_{\mathbf{W}}(\mathbf{x}) \text{ je výstup perceptronu}$$

**váhy pro minimální chybu** pak hledáme **optimalizačním prohledáváním** spojitého prostoru vah

$$\frac{\partial E}{\partial W_j} = \text{Err} \times \frac{\partial \text{Err}}{\partial W_j} = \text{Err} \times \frac{\partial}{\partial W_j} (y - g(\sum_{j=0}^n W_j x_j)) = -\text{Err} \times g'(in) \times x_j$$

**pravidlo pro úpravu váhy**

$$W_j \leftarrow W_j + \alpha \times \text{Err} \times g'(in) \times x_j \quad \alpha \dots \text{učící konstanta (learning rate)}$$

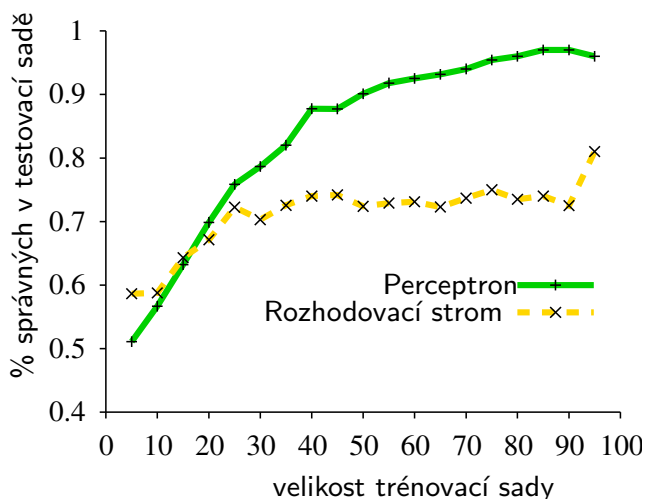
např.  $\text{Err} = y - h_{\mathbf{W}}(\mathbf{x}) > 0 \Rightarrow$  výstup  $h_{\mathbf{W}}(\mathbf{x})$  je moc malý  
 $\Rightarrow$  váhy se musí **zvýšit** pro pozitivní příklady a **snížit** pro negativní

úpravu vah provádíme po každém příkladu  $\rightarrow$  opakovaně až do dosažení **ukončovacího kritéria**

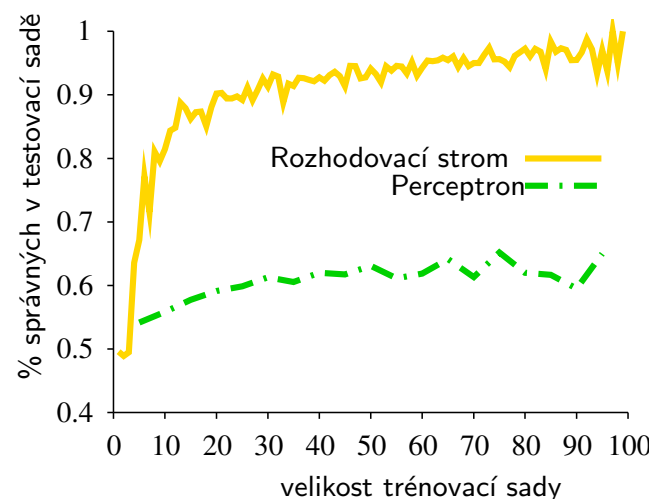
## Učení perceptronu pokrač.

učící pravidlo pro perceptron **konverguje ke správné funkci** pro libovolnou **lineárně separabilní** množinu dat

a) učení majoritní funkce



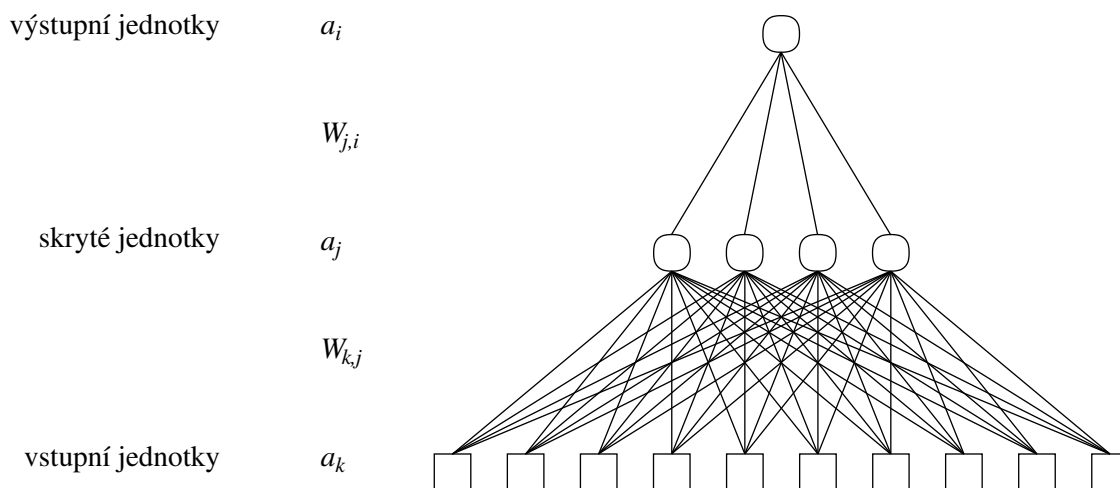
b) učení čekání na volný stůl v restauraci



# Vícevrstvé neuronové sítě

vrstvy jsou obvykle **úplně propojené**

počet **skrytých jednotek** je obvykle volen experimentálně



## Vyjadřovací síla vícevrstevných sítí

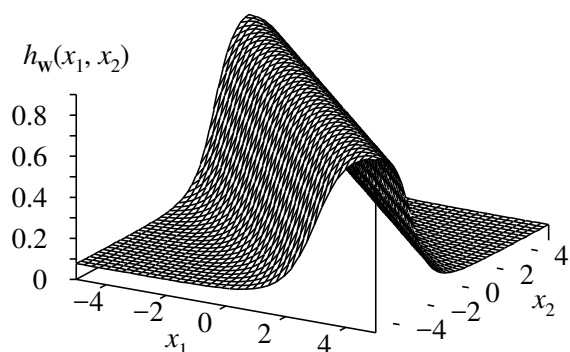
s jednou skrytou vrstvou – všechny **spojité funkce**

se dvěma skrytými vrstvami – **všechny funkce**

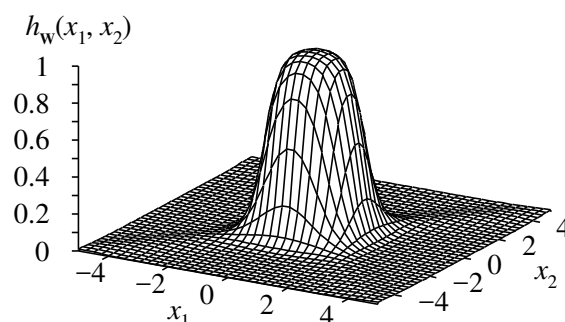
těžko se ovšem pro **konkrétní síť** zjišťuje její prostor **reprezentovatelných funkcí**

např.

dvě “opačné” skryté jednotky  
vytvoří *hřbet*



dva hřebety vytvoří *homoli*



## Učení vícevrstevných sítí

pravidla pro úpravu vah:

▶ výstupní vrstva – stejně jako u perceptronu

$$W_{j,i} \leftarrow W_{j,i} + \alpha \times a_j \times \Delta_i \quad \text{kde} \quad \Delta_i = \text{Err}_i \times g'(in_i)$$

▶ skryté vrstvy – zpětné šíření (*back-propagation*) chyby z výstupní vrstvy

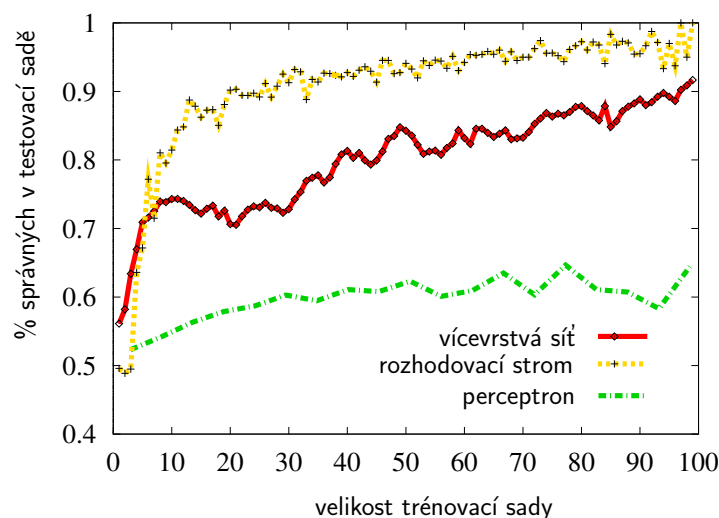
$$W_{k,j} \leftarrow W_{k,j} + \alpha \times a_k \times \Delta_j \quad \text{kde} \quad \Delta_j = g'(in_j) \sum_i W_{j,i} \Delta_i$$

problémy učení:

- dosažení lokálního minima chyby
- příliš pomalá konvergence
- přílišné upnutí na příklady → neschopnost generalizovat

## Učení vícevrstevných sítí pokrač.

vícevrstvá síť se problémem čekání na volný stůl v restauraci učí znatelně líp než perceptron



# Neuronové sítě – shrnutí

- ▶ většina mozků má **velké množství** neuronů; každý **neuron**  $\approx$  lineární prahová jednotka (?)
- ▶ **perceptrony** (jednovrstvé sítě) mají **nízkou** vyjadřovací sílu
- ▶ **vícevrstvé sítě** jsou **dostatečně silné**; mohou být trénovány pomocí **zpětného šíření chyby**
- ▶ velké množství reálných aplikací
  - rozpoznávání řeči
  - řízení auta
  - rozpoznávání ručně psaného písma
  - ...
- ▶ v posledních letech **hluboké neuronové sítě** – lépe **generalizují**

