# Učení, rozhodovací stromy, neuronové sítě

Aleš Horák

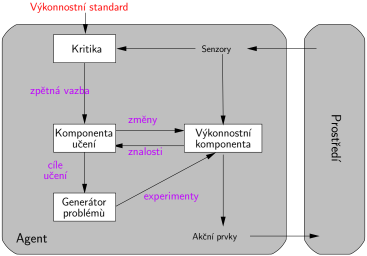
E-mail: hales@fi.muni.cz
http://nlp.fi.muni.cz/uui/

Obsah:

# Učení

- učení je klíčové pro neznámé prostředí (kde návrhář není vševědoucí)
- učení je také někdy vhodné jako metoda konstrukce systému – vystavit agenta realitě místo přepisování reality do pevných pravidel
- učení agenta – využití jeho vjemů z prostředí nejen pro vyvození další akce
- učení modifikuje rozhodovací systém agenta pro zlepšení jeho výkonnosti

# Učící se agent




příklad automatického taxi:

- Výkonnostní komponenta – obsahuje znalosti a postupy pro výběr akcí pro vlastní řízení auta
- Kritika – sleduje reakce okolí na akce taxi. Např. při rychlém přejetí 3 podélných pruhů zaznamená a předá pohoršující reakce dalších řidičů
- Komponenta učení – z hlášení Kritiky vyvodí nové pravidlo, že takové přejíždění je nevhodné, a modifikuje odpovídajícím způsobem Výkonnostní komponentu
- Generátor problémů – zjišťuje, které oblasti by mohly potřebovat vylepšení a navrhuje experimenty, jako je třeba brždění na různých typech vozovky

# Komponenta učení

návrh komponenty učení závisí na několika atributech:

- jaký typ výkonnostní komponenty je použit
- která funkční část výkonnostní komponenty má být učena
- jak je tato funkční část reprezentována
- jaká zpětná vazba je k dispozici

| výkonnostní komponenta | funkční část | reprezentace | zpětná vazba |
|---|---|---|---|
| Alfa-beta prohledávání | vyhodnocovací funkce | vážená lineární funkce | výhra/prohra |
| Logický agent | určení akce | axiomy *Result* | výsledné skóre |
| Reflexní agent | váhy preceptronu | neuronová síť | správná/špatná akce |

učení s dohledem (*supervised learning*) × bez dohledu (*unsupervised learning*)

- s dohledem – učení funkce z příkladů vstupů a výstupů
- bez dohledu – učení vzorů na vstupu vzhledem k reakcím prostředí
- posílené (*reinforcement learning*) – nejobecnější, agent se učí podle odměn/pokut

# Induktivní učení

známé taky jako věda ☺

nejjednodušší forma – učení funkce z příkladů (agent je tabula rasa)
$f$ je cílová funkce

každý příklad je dvojice $x$, $f(x)$ např.

$$\begin{array}{c|c|c} O & O & \times \\ \hline & \times & \\ \hline \times & & \end{array} \quad , \quad +1$$

úkol indukce:
najdi hypotézu $h$
takovou, že $h \approx f$
pomocí sady trénovacích příkladů

# Atributová reprezentace příkladů

příklady popsané výčtem hodnot atributů (libovolných hodnot)

např. rozhodování, zda počkat na uvolnění stolu v restauraci:

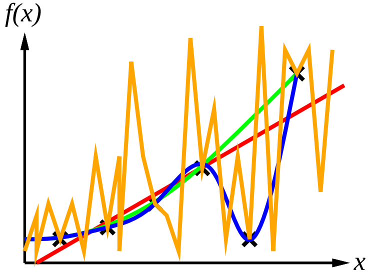
| Příklad | Atributy | | | | | | | | | | počkat? |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *Alt* | *Bar* | *Pá/So* | *Hlad* | *Štam* | *Cen* | *Déšť* | *Rez* | *Typ* | *ČekD* | |
| $X_1$ | A | N | N | A | část. | $$$ | N | A | mexická | 0–10 | A |
| $X_2$ | A | N | N | A | plno | $ | N | N | asijská | 30–60 | N |
| $X_3$ | N | A | N | N | část. | $ | N | N | bufet | 0–10 | A |
| $X_4$ | A | N | A | A | plno | $ | N | N | asijská | 10–30 | A |
| $X_5$ | A | N | A | N | plno | $$$ | N | A | mexická | >60 | N |
| $X_6$ | N | A | N | A | část. | $$ | A | A | pizzerie | 0–10 | A |
| $X_7$ | N | A | N | N | nikdo | $ | A | N | bufet | 0–10 | N |
| $X_8$ | N | N | N | A | část. | $$ | A | A | asijská | 0–10 | A |
| $X_9$ | N | A | A | N | plno | $ | A | N | bufet | >60 | N |
| $X_{10}$ | A | A | A | A | plno | $$$ | N | A | pizzerie | 10–30 | N |
| $X_{11}$ | N | N | N | N | nikdo | $ | N | N | asijská | 0–10 | N |
| $X_{12}$ | A | A | A | A | plno | $ | N | N | bufet | 30–60 | A |

Ohodnocení tvoří klasifikaci příkladů – pozitivní (A) a negativní (N)

# Metoda induktivního učení

zkonstruuj/uprav *h*, aby souhlasila s *f* na trénovacích příkladech
*h* je konzistentní $\Leftrightarrow$ souhlasí f *f* na všech příkladech

např. hledání křivky:



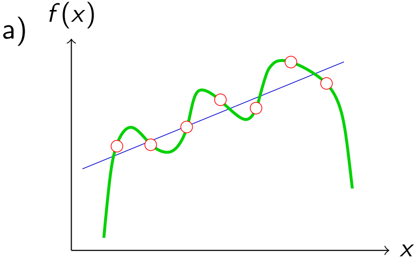

pravidlo Ockhamovy břitvy – maximalizovat kombinaci konzistence a jednoduchosti (*nejjednodušší ze správných je nejlepší*)

# Metoda induktivního učení pokrač.

hodně záleží na prostoru hypotéz, jsou na něj protichůdné požadavky:

– pokrýt co největší množství hledaných funkcí

– udržet nízkou výpočetní složitost hypotézy




– stejná sada 7 bodů

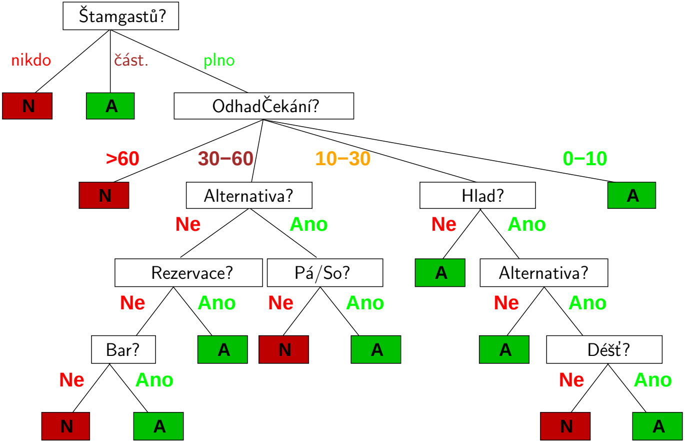
– nejmenší konzistentní polynom – polynom 6-tého stupně (7 parametrů)

– může být výhodnější použít nekonzistentní přibližnou lineární funkci

– přitom existuje konzistentní funkce $ax + by + c \sin x$

# Rozhodovací stromy

jedna z možných reprezentací hypotéz – rozhodovací strom pro určení, jestli počkat na stůl:



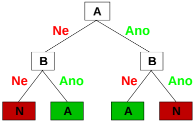
# Vyjadřovací síla rozhodovacích stromů

rozhodovací stromy vyjádří libovolnou Booleovskou funkci vstupních atributů → odpovídá výrokové logice

$$\forall s \text{ počkat?}(s) \Leftrightarrow (P_1(s) \vee P_2(s) \vee \ldots \vee P_n(s)),$$
$$\text{kde } P_i(s) = (A_1(s) = V_1 \wedge \ldots \wedge A_m(s) = V_m)$$

pro libovolnou Booleovskou funkci → řádek v pravdivostní tabulce = cesta ve stromu (od kořene k listu)

| A | B | A xor B |
|---|---|---|
| F | F | F |
| F | T | T |
| T | F | T |
| T | T | F |




triviálně

*pro libovolnou trénovací sadu existuje konzistentní rozhodovací strom s jednou cestou k listům pro každý příklad*

# Prostor hypotéz

1. vezměme pouze Booleovské atributy, bez dalšího omezení
   Kolik existuje různých rozhodovacích stromů s $n$ Booleovskými atributy?
   = počet všech Booleovských funkcí nad těmito atributy
   = počet různých pravdivostních tabulek s $2^n$ řádky = $2^{2^n}$
   např. pro 6 atributů existuje 18 446 744 073 709 551 616 různých rozhodovacích stromů
2. když se omezíme pouze na konjunktivní hypotézy ($Hlad \wedge \neg Déšt'$)
   Kolik existuje takových čistě konjunktivních hypotéz?
   každý atribut může být v pozitivní nebo negativní formě nebo nepoužit
   $\Rightarrow$ $3^n$ různých konjunktivních hypotéz (pro 6 atributů = 729)

prostor hypotéz s větší expresivitou

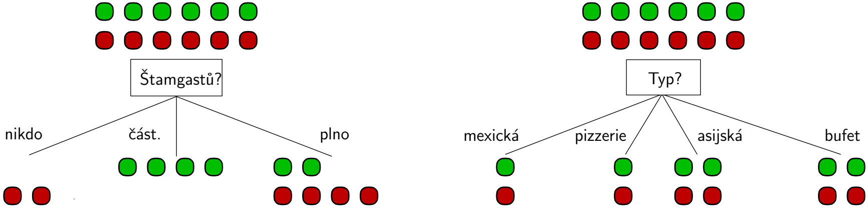
– zvyšuje šance, že najdeme přesné vyjádření cílové funkce
– ALE zvyšuje i počet možných hypotéz, které jsou konzistentní s trénovací množinou
  $\Rightarrow$ můžeme získat nižší kvalitu předpovědí (generalizace)

# Učení ve formě rozhodovacích stromů

- triviální konstrukce rozhodovacího stromu
  - pro každý příklad v trénovací sadě přidej jednu cestu od kořene k listu
  - na stejných příkladech jako v trénovací sadě bude fungovat přesně
  - na nových příkladech se bude chovat náhodně – negeneralizuje vzory z příkladů, pouze kopíruje pozorování
- heuristická konstrukce kompaktního stromu
  - chceme najít nejmenší rozhodovací strom, který souhlasí s příklady
  - přesné nalezení nejmenšího stromu je ovšem příliš složité
    $\rightarrow$ heuristikou najdeme alespoň dostatečně malý
  - hlavní myšlenka – vybíráme atributy pro test v co nejlepším pořadí

# Výběr atributu

dobrý atribut $\equiv$ rozdělí příklady na podmnožiny, které jsou (nejlépe) "všechny pozitivní" nebo "všechny negativní"




*Štamgastů?* je lepší volba atributu $\leftarrow$ dává lepší informaci o vlastní klasifikaci příkladů

# Výběr atributu – míra informace

informace – odpovídá na otázku

čím méně dopředu vím o výsledku obsaženém v odpovědi → tím více informace je v ní obsaženo

měřítko: 1 bit = odpověď na Booleovskou otázku s pravděpodobností odpovědi $\langle P(T) = \frac{1}{2}, P(F) = \frac{1}{2}\rangle$

$n$ možných odpovědí $\langle P(v_1), \ldots, P(v_n)\rangle$ → míra informace v odpovědi obsažená

$$I\big(\big\langle P(v_1), \ldots, P(v_n)\big\rangle\big) = \sum_{i=1}^{n} -P(v_i)\log_2 P(v_i)$$

tato míra se také nazývá entropie

např. pro házení mincí: $I(\langle\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle) = -\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ bit

pro házení *falešnou* mincí, která dává na 99% vždy jednu stranu mince:

$$I(\langle\tfrac{1}{100}, \tfrac{99}{100}\rangle) = -\tfrac{1}{100}\log_2\tfrac{1}{100} - \tfrac{99}{100}\log_2\tfrac{99}{100} = 0.08 \textit{ bitů}$$

# Použití míry informace pro výběr atributu

předpokládejme, že máme $p$ pozitivních a $n$ negativních příkladů

$\Rightarrow I\left(\langle \frac{p}{p+n}, \frac{n}{p+n} \rangle\right)$ *bitů je potřeba pro klasifikaci nového příkladu*

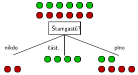
např. pro $X_1, \ldots, X_{12}$ z volby čekání na stůl je $p = n = 6$, takže potřebujeme 1 bit

výběr atributu – *kolik informace nám dá test na hodnotu atributu A?*

= rozdíl odhadu odpovědi před a po testu atributu

# Použití míry informace pro výběr atributu

atribut $A$ rozdělí sadu příkladů $E$ na podmnožiny $E_i$ (nejlépe tak, že každá potřebuje méně informace)




nechť $E_i$ má $p_i$ pozitivních a $n_i$ negativních příkladů

$\Rightarrow$ je potřeba $I(\langle \frac{p_i}{p_i+n_i}, \frac{n_i}{p_i+n_i} \rangle)$ bitů pro klasifikaci nového příkladu

$\Rightarrow$ očekávaný počet bitů celkem je $Remainder(A) = \sum_i \frac{p_i+n_i}{p+n} \cdot I(\langle \frac{p_i}{p_i+n_i}, \frac{n_i}{p_i+n_i} \rangle)$

$\Rightarrow$ výsledný zisk atributu $A$ je $Gain(A) = I(\langle \frac{p}{p+n}, \frac{n}{p+n} \rangle) - Remainder(A)$

výběr atributu = nalezení atributu s nejvyšší hodnotou $Gain(A)$

$Gain(Štamgastů?) \approx 0.541$ bitů $\qquad Gain(Typ?) = 0$ bitů

obecně: $E_i$ (pro $A = v_i$) obsahuje $c_{i,k}$ klasifikací do tříd $c_1, \ldots, c_k$

$\Rightarrow Remainder(A) = \sum_i P(v_i) \cdot I(\langle P(c_{i,1}), \ldots, P(c_{i,k}) \rangle)$

$\Rightarrow Gain(A) = I(\langle P(v_1), \ldots, P(v_n) \rangle) - Remainder(A)$

# Algoritmus IDT – učení formou rozhodovacích stromů

```
% induce_tree( +Attributes, +Examples, −Tree)
induce_tree( _, [], null) :- !.
induce_tree( _, [example( Class,_ ) | Examples], leaf( Class)) :- % ∀ příklady stejné klasifikace
    \+ (member( example( ClassX, _), Examples), ClassX \== Class), !.
induce_tree( Attributes, Examples, tree( Attribute, SubTrees)) :-
    choose_attribute( Attributes, Examples, Attribute/_), !,
    del( Attribute, Attributes, RestAtts), attribute( Attribute, Values),
    induce_trees( Attribute, Values, RestAtts, Examples, SubTrees).
induce_tree( _, Examples, leaf( ExClasses)) :- % žádný užitečný atribut, distribuce klasifikací
     findall( Class, member( example( Class, _), Examples), ExClasses).

% induce_trees( +Att, +Values, +RestAtts, +Examples, −SubTrees):
% najdi podstromy SubTrees pro podmnožiny příkladů Examples podle hodnot (Values) atributu Att
induce_trees( _, [], _, _, [] ). % žádné atributy, žádné podstromy
induce_trees( Att, [Val1 | Vals], RestAtts, Exs, [Val1 : Tree1 | Trees]) :-
    attval_subset( Att = Val1, Exs, ExampleSubset),
    induce_tree( RestAtts, ExampleSubset, Tree1),
    induce_trees( Att, Vals, RestAtts, Exs, Trees).

% attval_subset( +Attribute = +Value, +Examples, −Subset):
% Subset je podmnožina příkladů z Examples, které splňují podmínku Attribute = Value
attval_subset( AttributeValue, Examples, ExampleSubset) :-
    findall( example( Class, Obj),
             (member( example( Class, Obj), Examples), satisfy( Obj, [ AttributeValue])),
             ExampleSubset).
% satisfy( Object, Description)
satisfy( Object, Conj) :- \+ (member( Att = Val, Conj), member( Att = ValX, Object), ValX \== Val).
```

# Algoritmus IDT – učení formou rozhodovacích stromů

```
% choose_attribute( +Atts, +Examples, −BestAtt/BestGain) − výběr nejlepšího atributu
choose_attribute([],    _,  0/0).
choose_attribute([Att],    Examples, Att/Gain):- !,  gain(Examples, Att,  Gain).
choose_attribute([Att|Atts],     Examples, BestAtt/BestGain):-
    choose_attribute(Atts,   Examples, BestAtt1/BestGain1),
    gain(Examples, Att,  Gain),
    (Gain>BestGain1, !, BestAtt=Att, BestGain=Gain ;
     BestAtt=BestAtt1, BestGain=BestGain1).

% gain( +Examples, +Attribute, −Gain) − zisk atributu
gain( Exs,  Att  ,Gain)   :- attribute(    Att  ,AttVals    ),  length(Exs,  Total),
        setof(Class,   X^example(Class,X), Classes),  %          množina všech Class
        findall(Nc,   (member(C,Classes), cntclass(C,Exs,Nc)),   CCnts),
        info(CCnts,Total,I),     rem(Att,  AttVals,Exs,Classes,Total,Rem),
        Gain is  I−Rem.

% info(+ValueCounts, +Total, −I)
```

% míra informace $I(\langle P(v_1), \ldots, P(v_n)\rangle) = \sum_{i=1}^{n} -P(v_i)\log_2 P(v_i)$

```
info([],    _,  0).
info([VC|ValueCounts],  Total,   I)   :- info(ValueCounts,Total,I1),
        (VC = 0, !,  I  is  I1   ;
         Pvi is  VC / Total,  log2(Pvi,  LogPvi),  I  is  − Pvi ∗ LogPvi + I1).
```

# Algoritmus IDT – učení formou rozhodovacích stromů

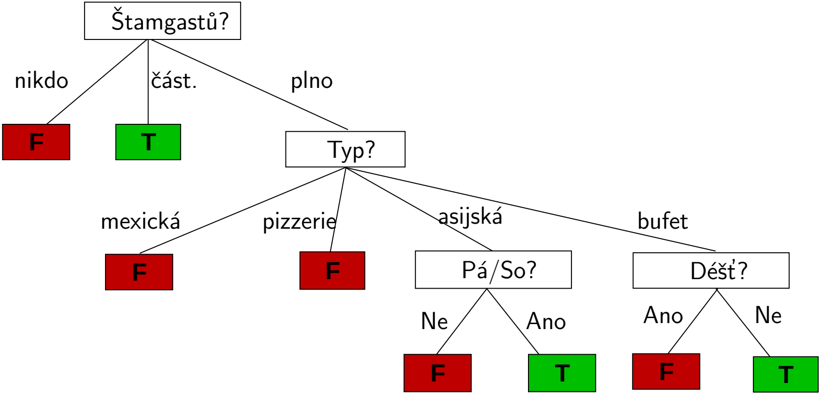
```
% rem( +Att, +AttVals, +Exs, +Classes, +Total, −Rem)
% "zbytková informace" po testu na Att:   Remainder(A) = ∑_i P(v_i) · I(⟨P(c_{i,1}), ..., P(c_{i,k})⟩)
rem( _, [], _, _, _, 0).
rem( Att, [V | Vs], Exs, Classes, Total, Rem) :-
        findall(1, (member(example(_, AVs),Exs), member(Att = V, AVs)), L1),
        length(L1, Nv), % Nv = p_i + n_i
        findall(Ni, (member(C, Classes), cntclassattv(Att,V,C,Exs,Ni)), VCnts),
        Pv is Nv / Total, % P(v)
        info(VCnts,Nv,I), rem(Att,Vs,Exs,Classes,Total,Rem1),
        Rem is Pv * I + Rem1.

% cntclass( +Class, +Exs, −Cnt) − počet příkladů třídy Class
cntclass( Class, Exs, Cnt) :-
        findall(1, member(example(Class,_),Exs), L), length(L, Cnt).

% cntclass( +Att, +Val, +Class, +Exs, −Cnt)
% počet příkladů třídy Class pro hodnotu Val atributu Att
cntclassattv( Att, Val, Class, Exs, Cnt) :-
        findall(1, (member(example(Class,AVs),Exs), member(Att = Val, AVs)), L),
        length(L, Cnt).

log2(X, Y) :- Y is log(X) / log(2).
```

# Algoritmus IDT – příklad

```
attribute( hlad, [ano, ne]).
attribute( stam, [nikdo, cast, plno]).
attribute( cen, ['$', '$$', '$$$']).
...
example(pockat, [alt=ano, bar=ne, paso=ne, hlad=ano, stam=cast, cen='$$$', dest=ne, rez=ano,
                 typ=mexicka ]).
example(necekat, [alt=ano, bar=ne, paso=ne, hlad=ano, stam=plno, cen='$', dest=ne, rez=ne,
                  typ=asijska ]).
...
:- induce_tree(T),show(T).
stam?
  = nikdo
    necekat
  = cast
    pockat
  = plno
    hlad?
      = ano
        cen?
          = $
            paso?
              = ano
                pockat
              = ne
                necekat
          = $$$
            necekat
      = ne
        necekat
```

# IDT – výsledný rozhodovací strom

rozhodovací strom naučený z 12-ti příkladů:




podstatně jednodušší než strom “z tabulky příkladů”

# Hodnocení úspěšnosti učícího algoritmu

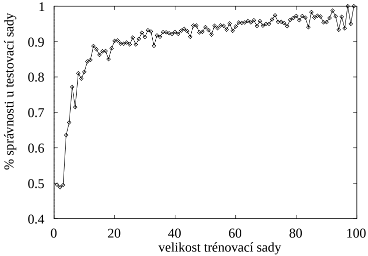
jak můžeme zjistit, zda $h \approx f$?

- dopředu – použít věty Teorie komputačního učení
- po naučení – kontrolou na jiné trénovací sadě

používaná metodologie (cross validation):

1. vezmeme velkou množinu příkladů
2. rozdělíme ji na 2 množiny – trénovací a testovací
3. aplikujeme učící algoritmus na trénovací sadu, získáme hypotézu $h$
4. změříme procento příkladů v testovací sadě, které jsou správně klasifikované hypotézou $h$
5. opakujeme kroky 2–4 pro různé velikosti trénovacích sad a pro náhodně vybrané trénovací sady

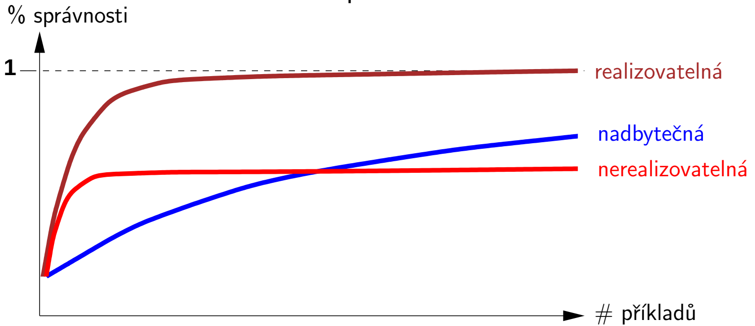
křivka učení – závislost velikosti trénovací sady na úspěšnosti



# Hodnocení úspěšnosti učícího algoritmu – pokrač.

tvar křivky učení závisí na

- je hledaná funkce realizovatelná × nerealizovatelná
  funkce může být nerealizovatelná kvůli
  - chybějícím atributům
  - omezenému prostoru hypotéz
- naopak nadbytečné expresivitě
  např. množství nerelevantních atributů



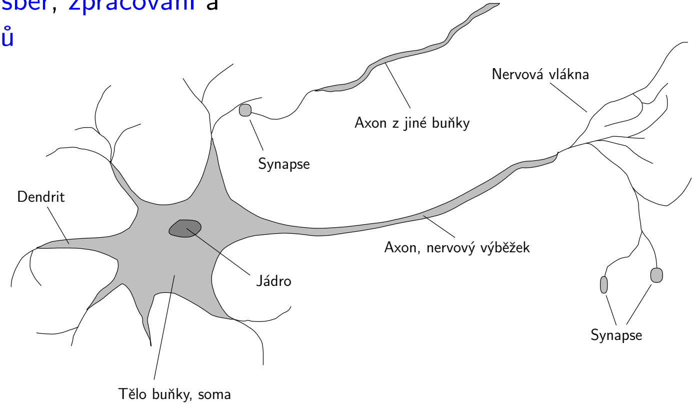
# Induktivní učení – shrnutí

- učení je potřebné pro neznámé prostředí (a líné analytiky ☺)
- učící se agent – výkonnostní komponenta a komponenta učení
- metoda učení závisí na typu výkonnostní komponenty, dostupné zpětné vazbě, typu a reprezentaci části, která se má učením zlepšit
- u učení s dohledem – cíl je najít nejjednodušší hypotézu přibližně konzistentní s trénovacími příklady
- učení formou rozhodovacích stromů používá míru informace
- kvalita učení – přesnost odhadu změřená na testovací sadě

# Neuron

mozek – $10^{11}$ neuronů $> 20$ typů, $10^{14}$ synapsí, 1ms–10ms cyklus
nosiče informace – signály = "výkyvy" elektrických potenciálů (se šumem)

neuron – mozková buňka, která má za úkol sběr, zpracování a šíření signálů



# Počítačový model – neuronové sítě

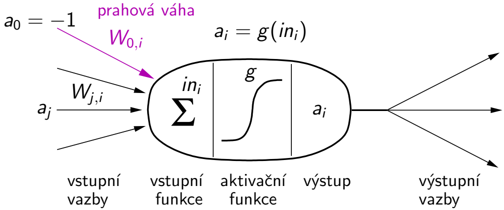
1943 – McCulloch & Pitts – matematický model neuronu
spojené do neuronové sítě – schopnost tolerovat šum ve vstupu a učit se

jednotky v neuronové síti (*units*)
- jsou propojeny vazbami (*links*)
- vazba z jednotky $j$ do $i$ propaguje aktivaci $a_j$ jednotky $j$
- každá vazba má číselnou váhu $W_{j,i}$ (síla+znaménko)

funkce jednotky $i$:

1. spočítá váženou $\sum$ vstupů $= in_i$
2. aplikuje aktivační funkci $g$
3. tím získá výstup $a_i$

$$a_i = g(in_i) = g(\sum_j W_{j,i} a_j)$$



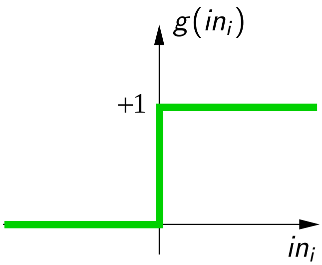
# Aktivační funkce

účel aktivační funkce:

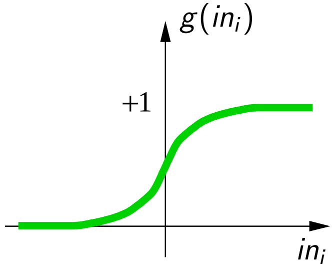
- jednotka má být aktivní ($\approx +1$) pro pozitivní příklady, jinak neaktivní $\approx 0$
- aktivace musí být nelineární, jinak by celá síť byla lineární

např.

a)




b)



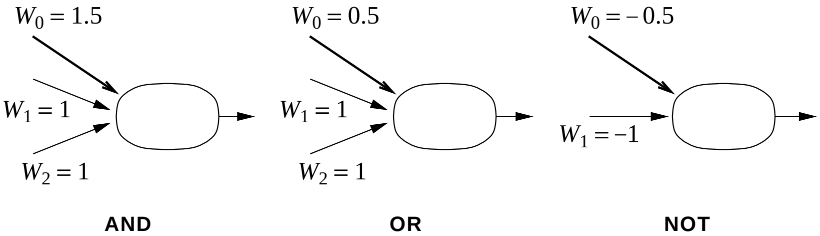

prahová funkce

sigmoida $\quad 1/(1 + e^{-x})$

je derivovatelná – důležité pro učení

změny prahové váhy $W_{0,i}$ nastavují nulovou pozicí – nastavují práh aktivace

# Logické funkce pomocí neuronové jednotky




jednotka McCulloch & Pitts sama umí implementovat základní Booleovské funkce

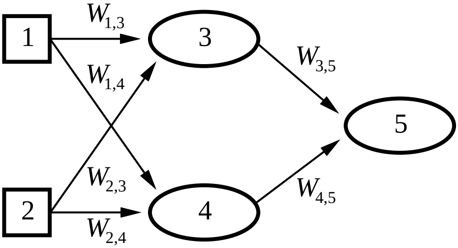
$\Rightarrow$ kombinacemi jednotek do sítě můžeme implementovat libovolnou Booleovskou funkci

# Struktury neuronových sítí

- sítě s předním vstupem (*feed-forward networks*)
    - necyklické
    - implementují funkce
    - nemají vnitřní paměť
- rekurentní sítě (*recurrent networks*)
    - cyklické
    - vlastní výstup si berou opět na vstup
    - složitější a schopnější
    - výstup má (zpožděný) vliv na aktivaci = paměť
    - Hopfieldovy sítě – symetrické obousměrné vazby; fungují jako *asociativní paměť*
    - Boltzmannovy stroje – pravděpodobnostní aktivační funkce

# Příklad sítě s předním vstupem

síť 5-ti jednotek – 2 vstupní jednotky, 1 skrytá vrstva (2 jednotky), 1 výstupní jednotka

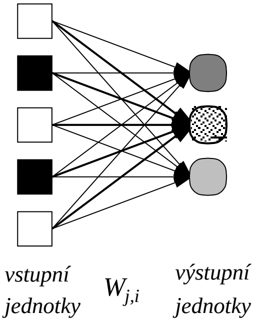


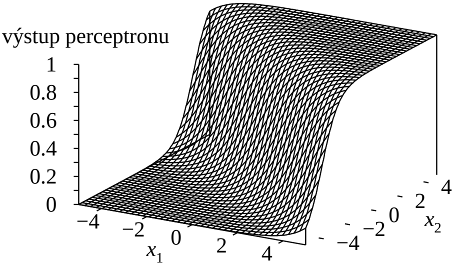

síť s předním vstupem = parametrizovaná nelineární funkce vstupu

$$
\begin{aligned}
a_5 &= g(W_{3,5} \cdot a_3 + W_{4,5} \cdot a_4) \\
&= g\big(W_{3,5} \cdot g(W_{1,3} \cdot a_1 + W_{2,3} \cdot a_2) + W_{4,5} \cdot g(W_{1,4} \cdot a_1 + W_{2,4} \cdot a_2)\big)
\end{aligned}
$$

# Jednovrstvá síť – perceptron

perceptron
- pro Booleovskou funkci 1 výstupní jednotka
- pro složitější klasifikaci – více výstupních jednotek



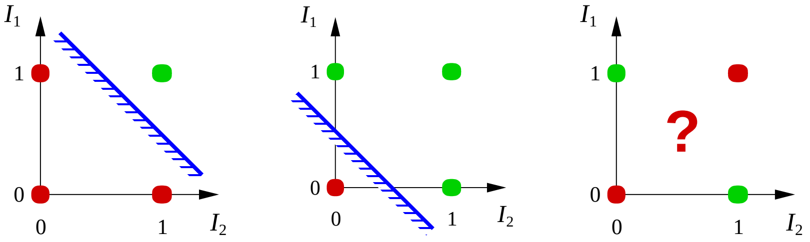



# Vyjadřovací síla perceptronu

perceptron může reprezentovat hodně Booleovských funkcí – AND, OR, NOT, majoritní funkci, ...

$$\sum_j W_j x_j > 0 \quad \textit{nebo} \quad \mathbf{W} \cdot \mathbf{x} > 0$$

reprezentuje lineární separátor (nadrovina) v prostoru vstupu:




a) $I_1$ **and** $I_2$ b) $I_1$ **or** $I_2$ c) $I_1$ **xor** $I_2$

# Učení perceptronu

výhoda perceptronu – existuje jednoduchý učící algoritmus pro libovolnou lineárně separabilní funkci

učení perceptronu = upravování vah, aby se snížila chyba na trénovací sadě

kvadratická chyba $E$ pro příklad se vstupem $\mathbf{x}$ a požadovaným (=správným) výstupem $y$ je

$$E = \frac{1}{2}Err^2 \equiv \frac{1}{2}(y - h_{\mathbf{W}}(\mathbf{x}))^2, \quad \text{kde } h_{\mathbf{W}}(\mathbf{x}) \text{ je výstup perceptronu}$$

váhy pro minimální chybu pak hledáme optimalizačním prohledáváním spojitého prostoru vah

$$\frac{\partial E}{\partial W_j} = Err \times \frac{\partial Err}{\partial W_j} = Err \times \frac{\partial}{\partial W_j}\left(y - g\left(\sum_{j=0}^{n} W_j x_j\right)\right) = -Err \times g'(in) \times x_j$$

pravidlo pro úpravu váhy

$$W_j \leftarrow W_j + \alpha \times Err \times g'(in) \times x_j \qquad \alpha \ldots \text{učící konstanta (\textit{learning rate})}$$

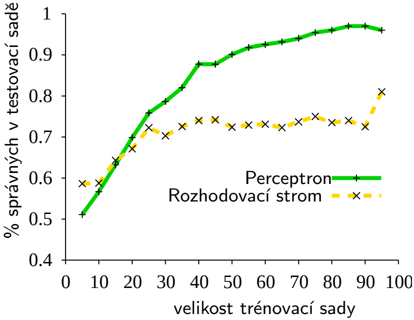
např. $Err = y - h_{\mathbf{W}}(\mathbf{x}) > 0 \quad \Rightarrow \quad$ výstup $h_{\mathbf{W}}(\mathbf{x})$ je moc malý
$\Rightarrow$ váhy se musí *zvýšit* pro pozitivní příklady a *snížit* pro negativní

úpravu vah provádíme po každém příkladu $\rightarrow$ opakovaně až do dosažení ukončovacího kritéria

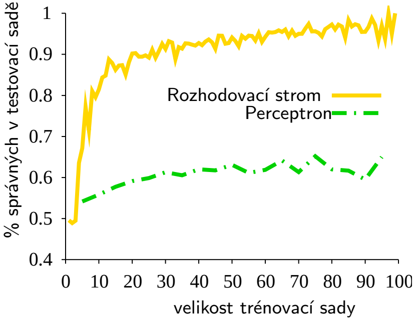
# Učení perceptronu pokrač.

učící pravidlo pro perceptron konverguje ke správné funkci pro libovolnou lineárně separabilní množinu dat

a) učení majoritní funkce

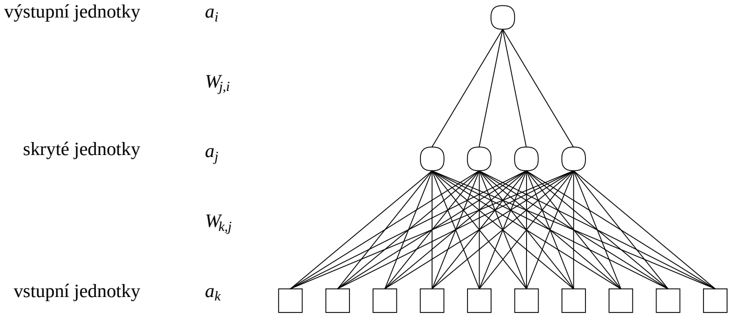



b) učení čekání na volný stůl v restauraci



# Vícevrstvé neuronové sítě

vrstvy jsou obvykle úplně propojené
počet skrytých jednotek je obvykle volen experimentálně

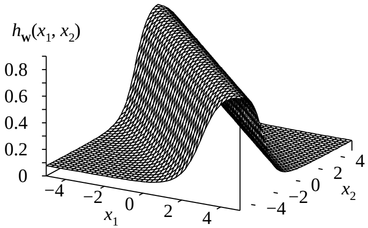


# Vyjadřovací síla vícevrstvých sítí

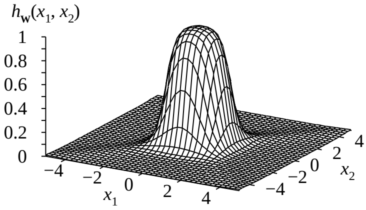
s jednou skrytou vrstvou – všechny spojité funkce
se dvěma skrytými vrstvami – všechny funkce
těžko se ovšem pro konkrétní síť zjišťuje její prostor reprezentovatelných funkcí

např.

dvě "opačné" skryté jednotky vytvoří *hřbet*




dva hřbety vytvoří *homoli*



# Učení vícevrstvých sítí

pravidla pro úpravu vah:

- výstupní vrstva – stejně jako u perceptronu

$$W_{j,i} \leftarrow W_{j,i} + \alpha \times a_j \times \Delta_i \qquad kde \quad \Delta_i = Err_i \times g'(in_i)$$

- skryté vrstvy – zpětné šíření (*back-propagation*) chyby z výstupní vrstvy

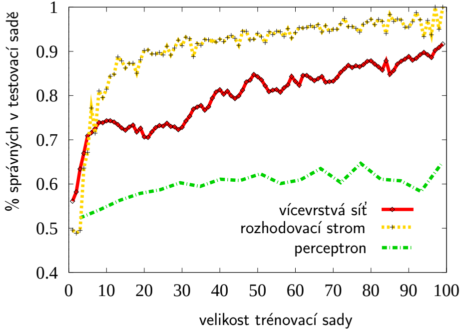
$$W_{k,j} \leftarrow W_{k,j} + \alpha \times a_k \times \Delta_j \qquad kde \quad \Delta_j = g'(in_j) \sum_i W_{j,i} \Delta_i$$

problémy učení:

- dosažení lokálního minima chyby
- příliš pomalá konvergence
- přílišné upnutí na příklady → neschopnost generalizovat

# Učení vícevrstvých sítí pokrač.

vícevrstvá síť se problém čekání na volný stůl v restauraci učí znatelně líp než perceptron



# Neuronové sítě – shrnutí

- většina mozků má velké množství neuronů; každý neuron $\approx$ lineární prahová jednotka (?)
- perceptrony (jednovrstvé sítě) mají nízkou vyjadřovací sílu
- vícevrstvé sítě jsou dostatečně silné; mohou být trénovány pomocí zpětného šíření chyby
- velké množství reálných aplikací
  - rozpoznávání řeči
  - řízení auta
  - rozpoznávání ručně psaného písma
  - ...