# Učení, rozhodovací stromy, neuronové sítě

Aleš Horák

E-mail: hales@fi.muni.cz
http://nlp.fi.muni.cz/uui/

Obsah:







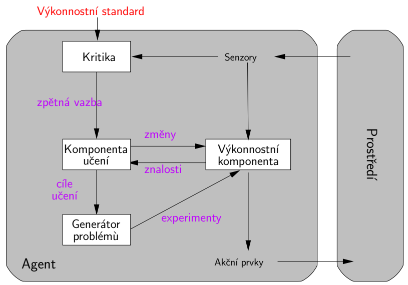
# Učení

- **učení** je klíčové pro neznámé prostředí (kde návrhář není vševědoucí)
- učení je také někdy vhodné jako **metoda konstrukce** systému – vystavit agenta realitě místo přepisování reality do pevných pravidel
- učení agenta – využití jeho **vjemů** z prostředí nejen pro vyvození další akce
- učení **modifikuje rozhodovací systém** agenta pro zlepšení jeho výkonnosti





# Učící se agent




příklad automatického taxi:

- Výkonnostní komponenta – obsahuje znalosti a postupy pro výběr akcí pro vlastní řízení auta
- Kritika – sleduje reakce okolí na akce taxi. Např. při rychlém přejetí 3 podélných pruhů zaznamená a předá pohoršující reakce dalších řidičů
- Komponenta učení – z hlášení Kritiky vyvodí nové pravidlo, že takové přejíždění je nevhodné, a modifikuje odpovídajícím způsobem Výkonnostní komponentu
- Generátor problémů – zjišťuje, které oblasti by mohly potřebovat vylepšení a navrhuje experimenty, jako je třeba brždění na různých typech vozovky





# Komponenta učení

**návrh komponenty učení** závisí na několika atributech:

- jaký typ **výkonnostní komponenty** je použit
- která funkční **část** výkonnostní komponenty má být **učena**
- jak je tato funkční část **reprezentována**
- jaká **zpětná vazba** je k dispozici

| výkonnostní komponenta | **funkční část** | **reprezentace** | zpětná vazba |
|---|---|---|---|
| Alfa-beta prohledávání | **vyhodnocovací funkce** | **vážená lineární funkce** | výhra/prohra |
| Logický agent | **určení akce** | **axiomy** *Result* | výsledné skóre |
| Reflexní agent | **váhy preceptronu** | **neuronová síť** | správná/špatná akce |

učení **s dohledem** (*supervised learning*) × **bez dohledu** (*unsupervised learning*)

- s dohledem – učení **funkce** z příkladů vstupů a výstupů
- bez dohledu – učení **vzorů** na vstupu vzhledem k reakcím prostředí
- posílené (*reinforcement learning*) – nejobecnější, agent se učí podle

# Induktivní učení

známé taky jako **věda** ☺

nejjednodušší forma – učení funkce z příkladů (agent je tabula rasa)
$f$ je **cílová funkce**

každý **příklad** je dvojice $x$, $f(x)$ např.

| | | |
|---|---|---|
| O | O | × |
| | × | |
| × | | |

, $+1$

úkol **indukce**:
najdi **hypotézu** $h$
takovou, že $h \approx f$
pomocí sady **trénovacích příkladů**





# Atributová reprezentace příkladů

**příklady** popsané výčtem **hodnot atributů** (libovolných hodnot)

např. rozhodování, zda počkat na uvolnění stolu v restauraci:

| Příklad | Atributy | | | | | | | | | | počkat? |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *Alt* | *Bar* | *Pá/So* | *Hlad* | *Štam* | *Cen* | *Déšť* | *Rez* | *Typ* | *ČekD* | |
| $X_1$ | A | N | N | A | část. | \$\$\$ | N | A | mexická | 0–10 | A |
| $X_2$ | A | N | N | A | plno | \$ | N | N | asijská | 30–60 | N |
| $X_3$ | N | A | N | N | část. | \$ | N | N | bufet | 0–10 | A |
| $X_4$ | A | N | A | A | plno | \$ | N | N | asijská | 10–30 | A |
| $X_5$ | A | N | A | N | plno | \$\$\$ | N | A | mexická | >60 | N |
| $X_6$ | N | A | N | A | část. | \$\$ | A | A | pizzerie | 0–10 | A |
| $X_7$ | N | A | N | N | nikdo | \$ | A | N | bufet | 0–10 | N |
| $X_8$ | N | N | N | A | část. | \$\$ | A | A | asijská | 0–10 | A |
| $X_9$ | N | A | A | N | plno | \$ | A | N | bufet | >60 | N |
| $X_{10}$ | A | A | A | A | plno | \$\$\$ | N | A | pizzerie | 10–30 | N |
| $X_{11}$ | N | N | N | N | nikdo | \$ | N | N | asijská | 0–10 | N |
| $X_{12}$ | A | A | A | A | plno | \$ | N | N | bufet | 30–60 | A |

Ohodnocení tvoří **klasifikaci** příkladů – pozitivní (A) a negativní (N)

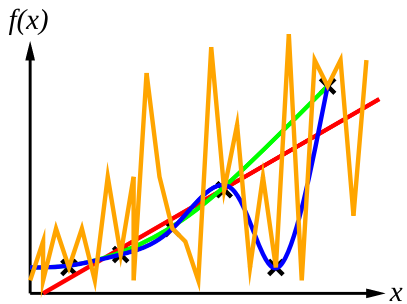




# Metoda induktivního učení

zkonstruuj/uprav $h$, aby souhlasila s $f$ na trénovacích příkladech
$h$ je **konzistentní** $\Leftrightarrow$ souhlasí f $f$ na všech příkladech

např. hledání křivky:



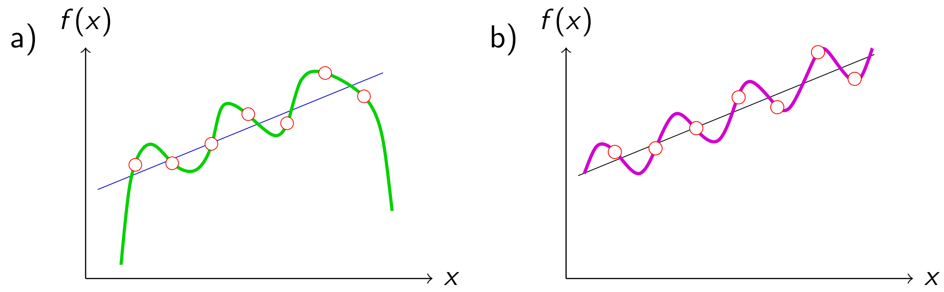

pravidlo **Ockhamovy břitvy** – maximalizovat kombinaci konzistence a jednoduchosti (*nejjednodušší ze správných je nejlepší*)





# Metoda induktivního učení pokrač.

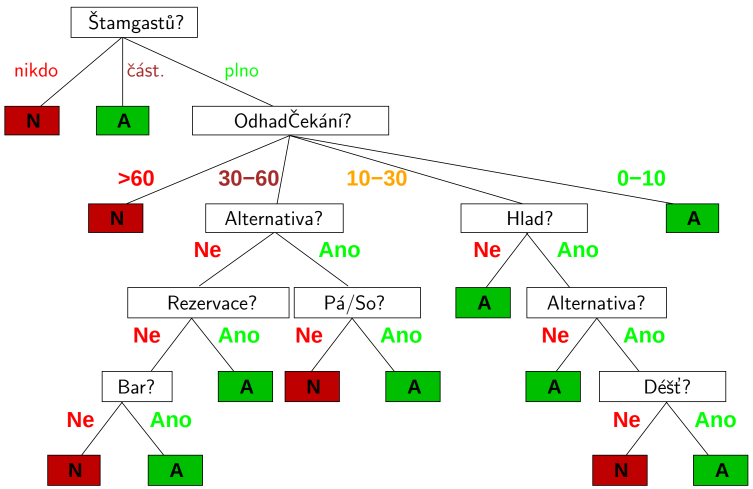
hodně záleží na **prostoru hypotéz**, jsou na něj protichůdné požadavky:
- pokrýt co **největší množství** hledaných funkcí
- udržet **nízkou výpočetní složitost** hypotézy




- stejná sada 7 bodů
- nejmenší konzistentní polynom – polynom 6-tého stupně (7 parametrů)
- může být výhodnější použít nekonzistentní **přibližnou** lineární funkci
- přitom existuje konzistentní funkce $ax + by + c \sin x$

# Rozhodovací stromy

jedna z možných reprezentací hypotéz – **rozhodovací strom** pro určení, jestli počkat na stůl:







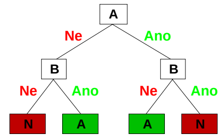

# Vyjadřovací síla rozhodovacích stromů

**rozhodovací stromy** vyjádří libovolnou **Booleovskou funkci vstupních atributů** → odpovídá **výrokové logice**

$\forall s$ počkat?$(s) \Leftrightarrow (P_1(s) \vee P_2(s) \vee \ldots \vee P_n(s))$,
kde $P_i(s) = (A_1(s) = V_1 \wedge \ldots \wedge A_m(s) = V_m)$

pro libovolnou Booleovskou funkci → řádek v pravdivostní tabulce = **cesta ve stromu** (od kořene k listu)

| A | B | A xor B |
|---|---|---|
| F | F | F |
| F | T | T |
| T | F | T |
| T | T | F |




triviálně

*pro libovolnou trénovací sadu existuje konzistentní rozhodovací strom s jednou cestou k listům pro každý příklad*





# Prostor hypotéz

1. vezměme pouze Booleovské atributy, bez dalšího omezení
   **Kolik existuje různých rozhodovacích stromů s $n$ Booleovskými atributy?**
   = počet všech Booleovských funkcí nad těmito atributy
   = počet různých pravdivostních tabulek s $2^n$ řádky = $2^{2^n}$
   např. pro 6 atributů existuje 18 446 744 073 709 551 616 různých rozhodovacích stromů
2. když se omezíme pouze na konjunktivní hypotézy $(Hlad \wedge \neg Déšť')$
   **Kolik existuje takových čistě konjunktivních hypotéz?**
   každý atribut může být v pozitivní nebo negativní formě nebo nepoužit
   ⇒ $3^n$ různých konjunktivních hypotéz (pro 6 atributů = 729)

**prostor** hypotéz s větší **expresivitou**
– **zvyšuje šance**, že najdeme přesné vyjádření cílové funkce
– ALE **zvyšuje** i **počet** možných hypotéz, které jsou konzistentní s trénovací množinou
⇒ můžeme získat **nižší kvalitu** předpovědí (generalizace)



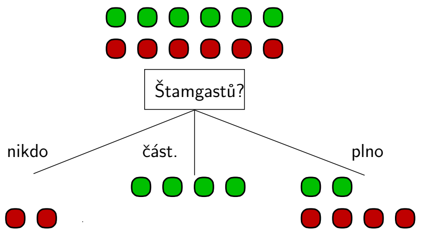


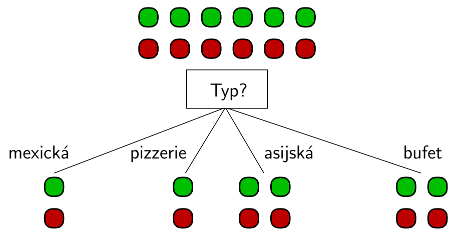
# Učení ve formě rozhodovacích stromů

- **triviální konstrukce rozhodovacího stromu**
  - pro každý příklad v trénovací sadě přidej jednu cestu od kořene k listu
  - na stejných příkladech jako v trénovací sadě bude fungovat přesně
  - na nových příkladech se bude chovat náhodně – **negeneralizuje** vzory z příkladů, pouze **kopíruje** pozorování
- **heuristická konstrukce kompaktního stromu**
  - chceme najít **nejmenší** rozhodovací strom, který souhlasí s příklady
  - přesné nalezení nejmenšího stromu je ovšem příliš složité
    → heuristikou najdeme alespoň **dostatečně malý**
  - hlavní myšlenka – vybíráme atributy pro test v co **nejlepším pořadí**

## Výběr atributu

**dobrý atribut** $\equiv$ rozdělí příklady na podmnožiny, které jsou (nejlépe) "všechny pozitivní" nebo "všechny negativní"




*Štamgastů?* je lepší volba atributu $\leftarrow$ dává lepší **informaci** o vlastní **klasifikaci** příkladů





## Výběr atributu – míra informace

**informace** – odpovídá na **otázku**
čím **méně** dopředu vím o výsledku obsaženém v odpovědi $\rightarrow$ tím **více** informace je v ní obsaženo

měřítko: **1 bit** = odpověď na Booleovskou otázku s pravděpodobností odpovědi $\langle P(T) = \frac{1}{2}, P(F) = \frac{1}{2}\rangle$

$n$ možných odpovědí $\langle P(v_1), \ldots, P(v_n)\rangle \rightarrow$ **míra informace** v odpovědi obsažená

$$\mathbf{I}\big(\big\langle \mathbf{P}(\mathbf{v_1}), \ldots, \mathbf{P}(\mathbf{v_n})\big\rangle\big) = \sum_{i=1}^{n} -P(v_i)\log_2 P(v_i)$$

tato míra se také nazývá **entropie**

např. pro házení mincí: $I(\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle) = -\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ bit

pro házení *falešnou* mincí, která dává na 99% vždy jednu stranu mince:

$$I(\langle \tfrac{1}{100}, \tfrac{99}{100}\rangle) = -\tfrac{1}{100}\log_2\tfrac{1}{100} - \tfrac{99}{100}\log_2\tfrac{99}{100} = 0.08 \textit{ bitů}$$





## Použití míry informace pro výběr atributu

předpokládejme, že máme $p$ pozitivních a $n$ negativních příkladů

$\Rightarrow I\big(\langle \frac{p}{p+n}, \frac{n}{p+n}\rangle\big)$ *bitů je potřeba pro klasifikaci nového příkladu*

např. pro $X_1, \ldots, X_{12}$ z volby čekání na stůl je $p = n = 6$, takže potřebujeme 1 bit

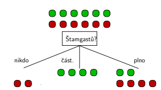
**výběr atributu** – *kolik informace nám dá test na hodnotu atributu A?*
= **rozdíl** odhadu odpovědi **před** a **po** testu atributu





## Použití míry informace pro výběr atributu

atribut $A$ rozdělí sadu příkladů $E$ na podmnožiny $E_i$ (nejlépe tak, že každá potřebuje méně informace)



nechť $E_i$ má $p_i$ pozitivních a $n_i$ negativních příkladů

- $\Rightarrow$ je potřeba $I\big(\langle \frac{p_i}{p_i+n_i}, \frac{n_i}{p_i+n_i}\rangle\big)$ bitů pro klasifikaci nového příkladu
- $\Rightarrow$ **očekávaný** počet bitů celkem je $\mathit{Remainder}(A) = \sum_i \frac{p_i+n_i}{p+n} \cdot I\big(\langle \frac{p_i}{p_i+n_i}, \frac{n_i}{p_i+n_i}\rangle\big)$
- $\Rightarrow$ výsledný **zisk atributu** $A$ je $\mathit{Gain}(A) = I\big(\langle \frac{p}{p+n}, \frac{n}{p+n}\rangle\big) - \mathit{Remainder}(A)$

**výběr atributu** = nalezení atributu s nejvyšší hodnotou $\mathit{Gain}(A)$

$\mathit{Gain}(\check{S}tamgast\mathring{u}?) \approx 0.541$ bitů $\qquad \mathit{Gain}(Typ?) = 0$ bitů

obecně: $E_i$ (pro $A = v_i$) obsahuje $c_{i,k}$ klasifikací do tříd $c_1, \ldots, c_k$

- $\Rightarrow \mathit{Remainder}(A) = \sum_i P(v_i) \cdot I\big(\langle P(c_{i,1}), \ldots, P(c_{i,k})\rangle\big)$
- $\Rightarrow \mathit{Gain}(A) = I\big(\langle P(v_1), \ldots, P(v_n)\rangle\big) - \mathit{Remainder}(A)$

# Algoritmus IDT – učení formou rozhodovacích stromů

```
% induce_tree( +Attributes, +Examples, −Tree)
induce_tree( _, [], null) :- !.
induce_tree( _, [example( Class,_ ) | Examples], leaf( Class)) :- % ∀ příklady stejné klasifikace
    \+ (member( example( ClassX, _), Examples), ClassX \== Class), !.
induce_tree( Attributes, Examples, tree( Attribute, SubTrees)) :-
    choose_attribute( Attributes, Examples, Attribute/_), !,
    del( Attribute, Attributes, RestAtts), attribute( Attribute, Values),
    induce_trees( Attribute, Values, RestAtts, Examples, SubTrees).
induce_tree( _, Examples, leaf( ExClasses)) :- % žádný užitečný atribut, distribuce klasifikací
     findall( Class, member( example( Class, _), Examples), ExClasses).

% induce_trees( +Att, +Values, +RestAtts, +Examples, −SubTrees):
% najdi podstromy SubTrees pro podmnožiny příkladů Examples podle hodnot (Values) atributu Att
induce_trees( _, [], _, _, [] ). % žádné atributy, žádné podstromy
induce_trees( Att, [Val1 | Vals], RestAtts, Exs, [Val1 : Tree1 | Trees]) :-
    attval_subset( Att = Val1, Exs, ExampleSubset),
    induce_tree( RestAtts, ExampleSubset, Tree1),
    induce_trees( Att, Vals, RestAtts, Exs, Trees).

% attval_subset( +Attribute = +Value, +Examples, −Subset):
% Subset je podmnožina příkladů z Examples, které splňují podmínku Attribute = Value
attval_subset( AttributeValue, Examples, ExampleSubset) :-
    findall( example( Class, Obj),
             (member( example( Class, Obj), Examples), satisfy( Obj, [ AttributeValue])),
             ExampleSubset).
% satisfy( Object, Description)
satisfy( Object, Conj) :- \+ (member( Att = Val, Conj), member( Att = ValX, Object), ValX \== Val).
```





# Algoritmus IDT – učení formou rozhodovacích stromů

```
% choose_attribute( +Atts, +Examples, −BestAtt/BestGain) − výběr nejlepšího atributu
choose_attribute([], _, 0/0).
choose_attribute([Att], Examples, Att/Gain):- !, gain(Examples, Att, Gain).
choose_attribute([Att|Atts], Examples, BestAtt/BestGain):-
    choose_attribute(Atts, Examples, BestAtt1/BestGain1),
    gain(Examples, Att, Gain),
    (Gain>BestGain1, !, BestAtt=Att, BestGain=Gain ;
     BestAtt=BestAtt1, BestGain=BestGain1).

% gain( +Examples, +Attribute, −Gain) − zisk atributu
gain( Exs, Att ,Gain) :- attribute( Att ,AttVals ), length(Exs, Total),
        setof(Class, X^example(Class,X), Classes), % množina všech Class
        findall(Nc, (member(C,Classes), cntclass(C,Exs,Nc)), CCnts),
        info(CCnts,Total,I), rem(Att, AttVals,Exs,Classes,Total,Rem),
        Gain is I−Rem.
```

*% info(+ValueCounts, +Total, −I)*

*% míra informace* $I(\langle P(v_1),\ldots,P(v_n)\rangle) = \sum_{i=1}^{n} -P(v_i)\log_2 P(v_i)$

```
info([], _, 0).
info([VC|ValueCounts], Total, I) :- info(ValueCounts,Total,I1),
        (VC = 0, !, I is I1 ;
         Pvi is VC / Total, log2(Pvi, LogPvi), I is − Pvi ∗ LogPvi + I1).
```





# Algoritmus IDT – učení formou rozhodovacích stromů

*% rem( +Att, +AttVals, +Exs, +Classes, +Total, −Rem)*

*% "zbytková informace" po testu na Att:* $Remainder(A) = \sum_i P(v_i) \cdot I(\langle P(c_{i,1}),\ldots,P(c_{i,k})\rangle)$

```
rem( _, [], _, _, _, 0).
rem( Att, [V | Vs], Exs, Classes, Total, Rem) :-
        findall(1, (member(example(_, AVs),Exs), member(Att = V, AVs)), L1),
        length(L1, Nv), % Nv = p_i + n_i
        findall(Ni, (member(C, Classes), cntclassattv(Att,V,C,Exs,Ni)), VCnts),
        Pv is Nv / Total, % P(v)
        info(VCnts,Nv,I), rem(Att,Vs,Exs,Classes,Total,Rem1),
        Rem is Pv ∗ I + Rem1.

% cntclass( +Class, +Exs, −Cnt) − počet příkladů třídy Class
cntclass( Class, Exs, Cnt) :-
        findall(1, member(example(Class,_),Exs), L), length(L, Cnt).

% cntclass( +Att, +Val, +Class, +Exs, −Cnt)
% počet příkladů třídy Class pro hodnotu Val atributu Att
cntclassattv( Att, Val, Class, Exs, Cnt) :-
        findall(1, (member(example(Class,AVs),Exs), member(Att = Val, AVs)), L),
        length(L, Cnt).

log2(X, Y) :- Y is log(X) / log(2).
```



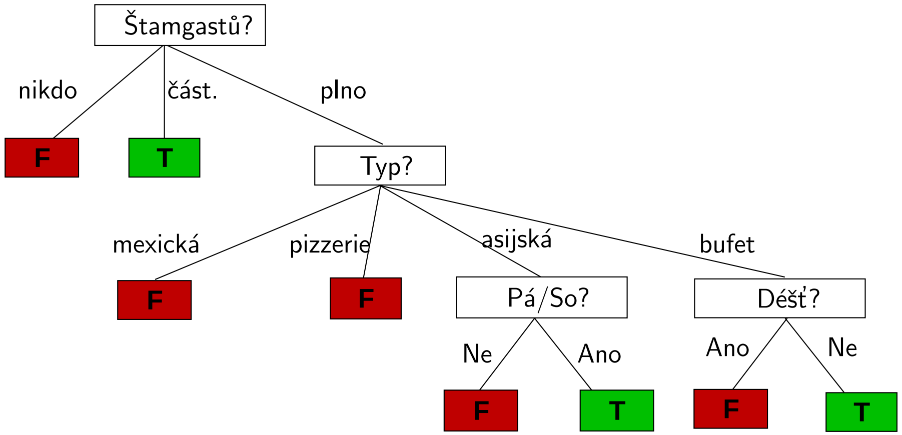


# Algoritmus IDT – příklad

```
attribute( hlad, [ano, ne]).
attribute( stam, [nikdo, cast, plno]).
attribute( cen, ['$', '$$', '$$$']).
...
example(pockat, [alt=ano, bar=ne, paso=ne, hlad=ano, stam=cast, cen='$$$', dest=ne, rez=ano,
                 typ=mexicka ]).
example(necekat, [alt=ano, bar=ne, paso=ne, hlad=ano, stam=plno, cen='$', dest=ne, rez=ne,
                  typ=asijska ]).
...
:- induce_tree(T),show(T).
stam?
  = nikdo
    necekat
  = cast
    pockat
  = plno
    hlad?
      = ano
        cen?
          = $
            paso?
              = ano
                pockat
              = ne
                necekat
          = $$$
            necekat
      = ne
        necekat
```

# IDT – výsledný rozhodovací strom

rozhodovací strom **naučený** z 12-ti příkladů:




podstatně jednodušší než strom "z tabulky příkladů"





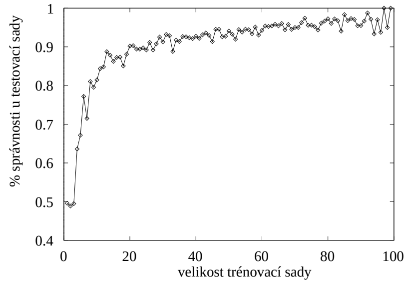
# Hodnocení úspěšnosti učícího algoritmu

jak můžeme zjistit, zda $h \approx f$?
- dopředu – použít věty Teorie komputačního učení
- po naučení – kontrolou na **jiné trénovací sadě**

používaná **metodologie** (**cross validation**):

1. vezmeme velkou množinu příkladů
2. rozdělíme ji na 2 množiny – **trénovací** a **testovací**
3. aplikujeme učící algoritmus na **trénovací** sadu, získáme hypotézu $h$
4. **změříme** procento příkladů v **testovací** sadě, které jsou správně klasifikované hypotézou $h$
5. opakujeme kroky 2–4 pro různé velikosti trénovacích sad a pro

**křivka učení** – závislost velikosti trénovací sady na úspěšnosti



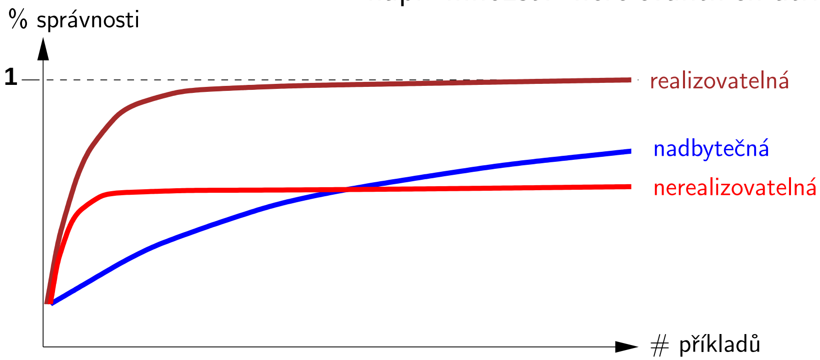





# Hodnocení úspěšnosti učícího algoritmu – pokrač.

**tvar křivky učení** závisí na

- je hledaná funkce **realizovatelná** × **nerealizovatelná**
  funkce může být nerealizovatelná kvůli
  - chybějícím atributům
  - omezenému prostoru hypotéz
- naopak **nadbytečné expresivitě**
  např. množství nerelevantních atributů







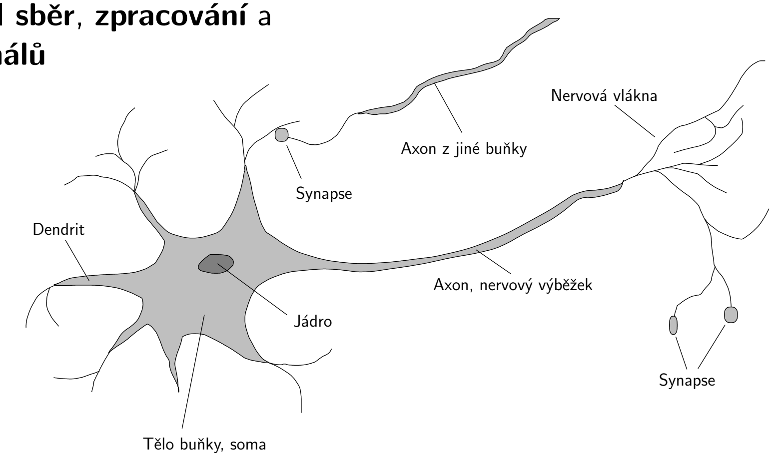

# Induktivní učení – shrnutí

- **učení** je potřebné pro **neznámé prostředí** (a líné analytiky ☺)
- **učící se agent** – **výkonnostní komponenta** a **komponenta učení**
- **metoda** učení závisí na **typu výkonnostní komponenty**, dostupné **zpětné vazbě**, **typu** a **reprezentaci** části, která se má učením zlepšit
- u **učení s dohledem** – cíl je najít nejjednodušší hypotézu přibližně konzistentní s trénovacími příklady
- učení formou **rozhodovacích stromů** používá **míru informace**
- **kvalita učení** – přesnost odhadu změřená na testovací sadě

# Neuron

**mozek** – $10^{11}$ neuronů $> 20$ typů, $10^{14}$ synapsí, 1ms–10ms cyklus
nosiče informace – **signály** = "výkyvy" elektrických potenciálů (se šumem)

**neuron** – mozková buňka, která má za úkol **sběr**, **zpracování** a **šíření signálů**








# Počítačový model – neuronové sítě

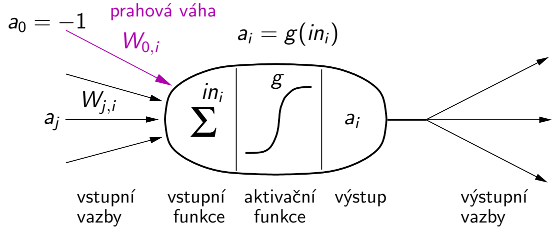
1943 – McCulloch & Pitts – matematický **model** neuronu
spojené do **neuronové sítě** – schopnost **tolerovat šum** ve vstupu a **učit se**

**jednotky** v neuronové síti (*units*)
- jsou propojeny **vazbami** (*links*)
- vazba z jednotky $j$ do $i$ propaguje **aktivaci** $a_j$ jednotky $j$
- každá vazba má číselnou **váhu** $W_{j,i}$ (síla+znaménko)

funkce jednotky $i$:

1. spočítá váženou $\sum$ **vstupů** $= in_i$
2. aplikuje **aktivační funkci** $g$
3. tím získá **výstup** $a_i$

$$a_i = g(in_i) = g(\sum_j W_{j,i} a_j)$$





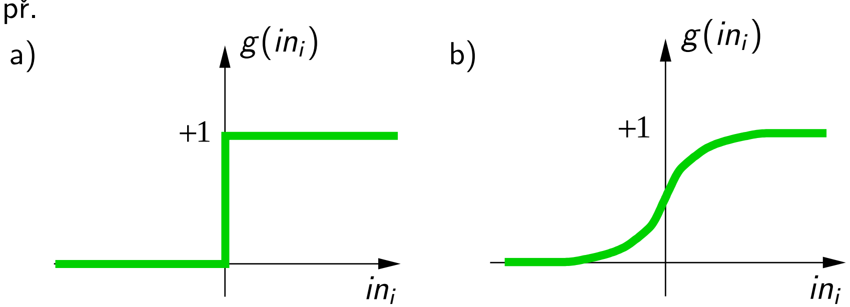



# Aktivační funkce

účel **aktivační funkce**:

- jednotka má být **aktivní** ($\approx +1$) pro pozitivní příklady, jinak **neaktivní** $\approx 0$
- aktivace musí být **nelineární**, jinak by celá síť byla lineární

např.




**prahová funkce**

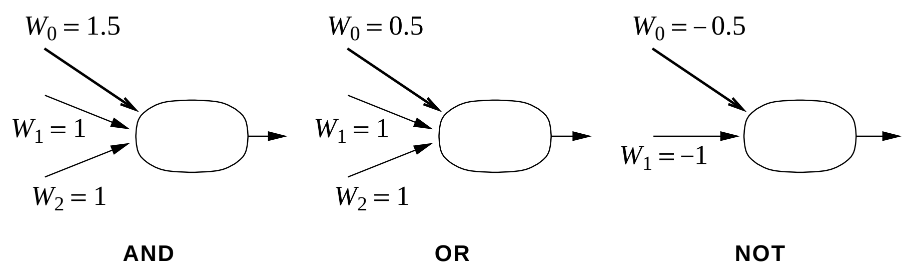
**sigmoida** $1/(1+e^{-x})$
je derivovatelná – důležité pro **učení**

změny prahové váhy $W_{0,i}$ nastavují nulovou pozici – nastavují **práh** aktivace





# Logické funkce pomocí neuronové jednotky




jednotka McCulloch & Pitts sama umí implementovat **základní Booleovské funkce**

⇒ kombinacemi jednotek do sítě můžeme implementovat **libovolnou Booleovskou funkci**

# Struktury neuronových sítí

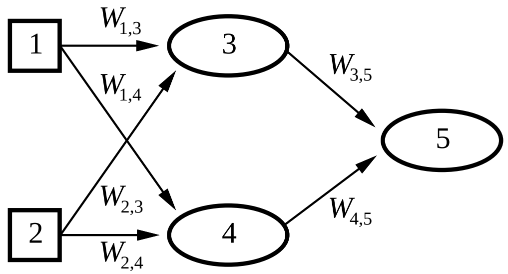
- sítě s předním vstupem (*feed-forward networks*)
  - necyklické
  - implementují funkce
  - nemají vnitřní paměť
- rekurentní sítě (*recurrent networks*)
  - cyklické
  - vlastní výstup si berou opět na vstup
  - složitější a schopnější
  - výstup má (zpožděný) vliv na aktivaci = **paměť**
  - Hopfieldovy sítě – symetrické obousměrné vazby; fungují jako *asociativní paměť*
  - Boltzmannovy stroje – pravděpodobnostní aktivační funkce





# Příklad sítě s předním vstupem

síť 5-ti jednotek – 2 vstupní jednotky, 1 skrytá vrstva (2 jednotky), 1 výstupní jednotka




síť s předním vstupem = **parametrizovaná** nelineární funkce vstupu

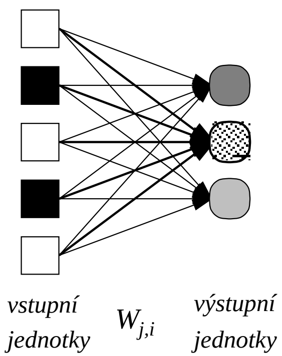
$$\begin{aligned} a_5 &= g(W_{3,5} \cdot a_3 + W_{4,5} \cdot a_4) \\ &= g\big(W_{3,5} \cdot g(W_{1,3} \cdot a_1 + W_{2,3} \cdot a_2) + W_{4,5} \cdot g(W_{1,4} \cdot a_1 + W_{2,4} \cdot a_2)\big) \end{aligned}$$

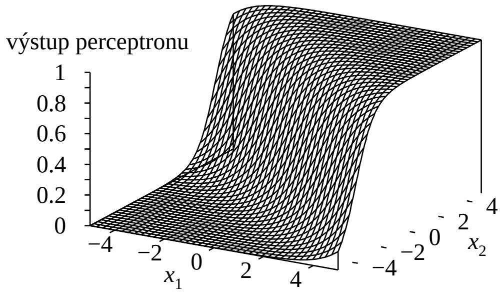




# Jednovrstvá síť – perceptron

**perceptron**
- pro Booleovskou funkci 1 výstupní jednotka
- pro složitější klasifikaci – **více výstupních jednotek**





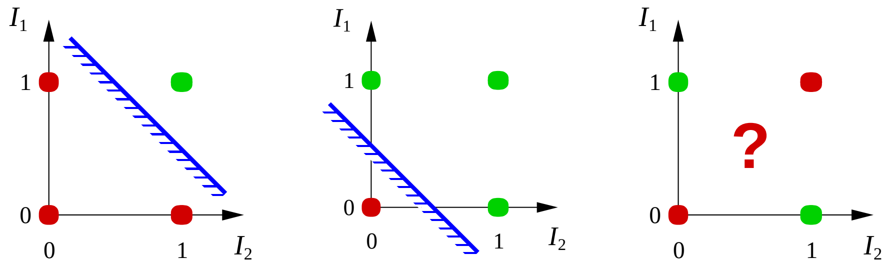



# Vyjadřovací síla perceptronu

**perceptron** může reprezentovat hodně Booleovských funkcí – AND, OR, NOT, majoritní funkci, ...

$$\sum_j W_j x_j > 0 \quad \textit{nebo} \quad \mathbf{W} \cdot \mathbf{x} > 0$$

reprezentuje **lineární separátor** (nadrovina) v prostoru vstupu:




a) $I_1$ **and** $I_2$   b) $I_1$ **or** $I_2$   c) $I_1$ **xor** $I_2$

# Učení perceptronu

**výhoda** perceptronu – existuje jednoduchý **učící algoritmus** pro libovolnou lineárně separabilní funkci

**učení perceptronu** = upravování vah, aby se **snížila chyba** na trénovací sadě

**kvadratická chyba** $E$ pro příklad se vstupem $\mathbf{x}$ a požadovaným (=správným) výstupem $y$ je

$E = \frac{1}{2}Err^2 \equiv \frac{1}{2}(y - h_{\mathbf{W}}(\mathbf{x}))^2$, kde $h_{\mathbf{W}}(\mathbf{x})$ je výstup perceptronu

**váhy pro minimální chybu** pak hledáme **optimalizačním prohledáváním** spojitého prostoru vah

$$\frac{\partial E}{\partial W_j} = Err \times \frac{\partial Err}{\partial W_j} = Err \times \frac{\partial}{\partial W_j}\left(y - g\left(\sum_{j=0}^{n} W_j x_j\right)\right) = -Err \times g'(in) \times x_j$$

**pravidlo pro úpravu váhy**

$W_j \leftarrow W_j + \alpha \times Err \times g'(in) \times x_j$  $\alpha \ldots$ učící konstanta (*learning rate*)

např. $Err = y - h_{\mathbf{W}}(\mathbf{x}) > 0$ $\Rightarrow$ výstup $h_{\mathbf{W}}(\mathbf{x})$ je moc malý

$\Rightarrow$ váhy se musí *zvýšit* pro pozitivní příklady a *snížit* pro negativní

úpravu vah provádíme po každém příkladu $\rightarrow$ opakovaně až do dosažení **ukončovacího kritéria**

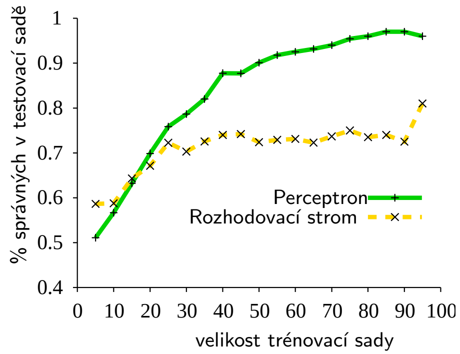




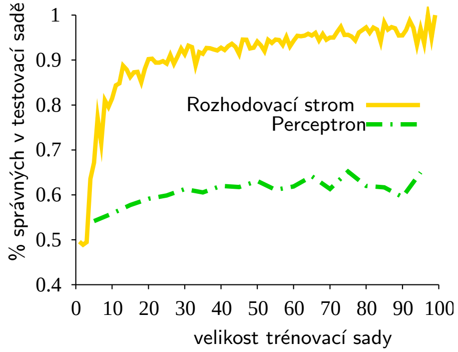
# Učení perceptronu pokrač.

učící pravidlo pro perceptron **konverguje ke správné funkci** pro libovolnou **lineárně separabilní** množinu dat

a) učení majoritní funkce




b) učení čekání na volný stůl v restauraci



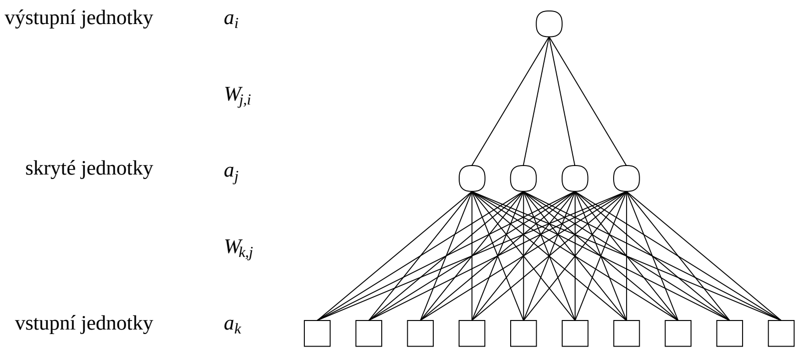





# Vícevrstvé neuronové sítě

**vrstvy** jsou obvykle **úplně propojené**

počet **skrytých jednotek** je obvykle volen experimentálně








# Vyjadřovací síla vícevrstvých sítí

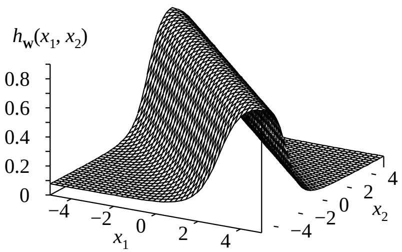
**s jednou skrytou vrstvou** – všechny spojité funkce

**se dvěma skrytými vrstvami** – všechny funkce

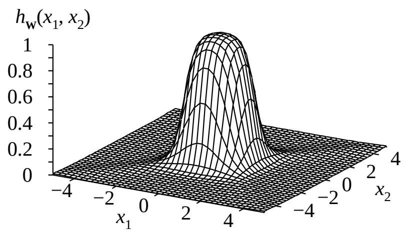
těžko se ovšem pro konkrétní síť zjišťuje její prostor reprezentovatelných funkcí

např.

dvě "opačné" skryté jednotky vytvoří *hřbet*




dva hřbety vytvoří *homoli*



# Učení vícevrstvých sítí

pravidla pro úpravu vah:

- výstupní vrstva – stejně jako u perceptronu

$$W_{j,i} \leftarrow W_{j,i} + \alpha \times a_j \times \Delta_i \qquad kde \quad \Delta_i = Err_i \times \mathbf{g}'(in_i)$$

- skryté vrstvy – **zpětné šíření** (*back-propagation*) chyby z výstupní vrstvy

$$W_{k,j} \leftarrow W_{k,j} + \alpha \times a_k \times \Delta_j \qquad kde \quad \Delta_j = \mathbf{g}'(in_j) \sum_i W_{j,i}\Delta_i$$

problémy učení:

– dosažení **lokálního minima** chyby

– příliš **pomalá konvergence**

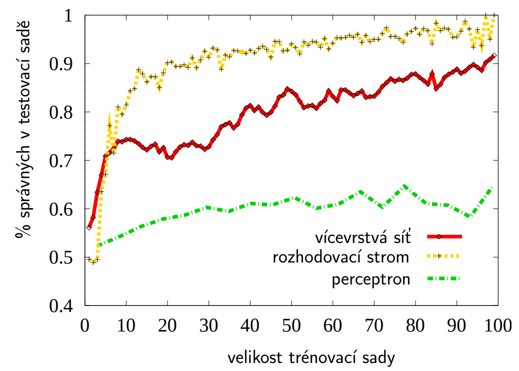
– přílišné **upnutí** na příklady $\rightarrow$ neschopnost generalizovat





# Učení vícevrstvých sítí pokrač.

vícevrstvá síť se problém čekání na volný stůl v restauraci **učí znatelně líp** než perceptron








# Neuronové sítě – shrnutí

- většina mozků má **velké množství** neuronů; každý **neuron** $\approx$ lineární prahová jednotka (?)
- **perceptrony** (jednovrstvé sítě) mají **nízkou** vyjadřovací sílu
- **vícevrstvé sítě** jsou **dostatečně silné**; mohou být trénovány pomocí **zpětného šíření chyby**
- velké množství reálných aplikací
  - rozpoznávání řeči
  - řízení auta
  - rozpoznávání ručně psaného písma
  - ...