Prohledávání stavového prostoru

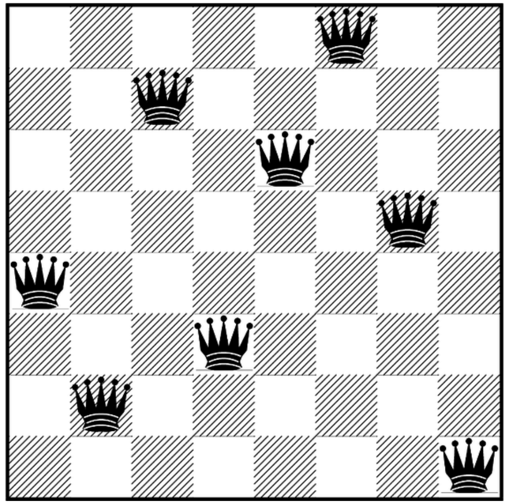
Aleš Horák

E-mail: hales@fi.muni.cz
http://nlp.fi.muni.cz/uui/

Obsah:

Problém osmi dam

úkol: *Rozestavte po šachovnici 8 dam tak, aby se žádné dvě vzájemně neohrožovaly.*



celkem pro *8 dam* existuje *92 různých řešení*

Problém osmi dam I

datová struktura – osmiprvkový seznam **[X1/Y1, X2/Y2, X3/Y3, X4/Y4, X5/Y5, X6/Y6, X7/Y7, X8/Y8]**

Solution = [1/4, 2/2, 3/7, 4/3, 5/6, 6/8, 7/5, 8/1]

```
solution(S) :- template(S), sol(S).

sol([]).
sol([X/Y|Others]) :- sol(Others),
                     member(X,[1,2,3,4,5,6,7,8]),
                     member(Y,[1,2,3,4,5,6,7,8]),
                     noattack(X/Y,Others).
noattack(_,[]).
noattack(X/Y,[X1/Y1|Others]) :- X=\=X1, Y=\=Y1, Y1-Y=\=X1-X,
                                Y1-Y=\=X-X1, noattack(X/Y,Others).
template([X1/Y1, X2/Y2, X3/Y3, X4/Y4, X5/Y5, X6/Y6, X7/Y7, X8/Y8]).

?- solution(Solution).
   Solution = [8/4, 7/2, 6/7, 5/3, 4/6, 3/8, 2/5, 1/1] ;
   Solution = [7/2, 8/4, 6/7, 5/3, 4/6, 3/8, 2/5, 1/1] ;
   Yes
```


Problém osmi dam II

počet možností u řešení I $= 64 \cdot 63 \cdot 62 \ldots \cdot 57 \approx \mathbf{1.8 \times 10^{14}}$
omezení **stavového prostoru** – každá dáma má svůj sloupec
počet možností u řešení II $= 8 \cdot 7 \cdot 6 \ldots \cdot 1 = \mathbf{40\,320}$

```
solution(S) :- template(S), sol(S).

sol([]).
sol([X/Y|Others]) :- sol(Others), member(Y,[1,2,3,4,5,6,7,8]),
                     noattack(X/Y,Others).
noattack(_,[]).
noattack(X/Y,[X1/Y1|Others]) :- Y=\=Y1, Y1-Y=\=X1-X, Y1-Y=\=X-X1,
                                noattack(X/Y,Others).

template([1/Y1,2/Y2,3/Y3,4/Y4,5/Y5,6/Y6,7/Y7,8/Y8]).
```

Problém osmi dam III

k souřadnicím x a y $\longrightarrow$ přidáme i souřadnice diagonály u a v

$u = x - y$ $D_x = [1..8]$ $\longrightarrow$ $D_u = [-7..7]$

$v = x + y$ $D_y = [1..8]$ $D_v = [2..16]$

po každém umístění dámy aktualizujeme **seznamy volných pozic**

počet možností u řešení III $= 2\,057$

```
solution(YList) :- sol(YList,[1,2,3,4,5,6,7,8],[1,2,3,4,5,6,7,8],
                       [−7,−6,−5,−4,−3,−2,−1,0,1,2,3,4,5,6,7],
                      [2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16]).
sol([],[],Dy,Du,Dv).
sol([Y|YList],[X|Dx1],Dy,Du,Dv) :- del(Y,Dy,Dy1), U is X−Y,
    del(U,Du,Du1), V is X+Y, del(V,Dv,Dv1), sol(YList,Dx1,Dy1,Du1,Dv1).

% když del nenajde Item, končí neúspěchem
del(Item,[Item|List],List).
del(Item,[First|List],[First|List1]) :- del(Item,List,List1).
```

Problém n dam pro $n = 100$:

řešení I . . . 10^{400} řešení II . . . 10^{158} řešení III . . . 10^{52}

Prohledávání stavového prostoru

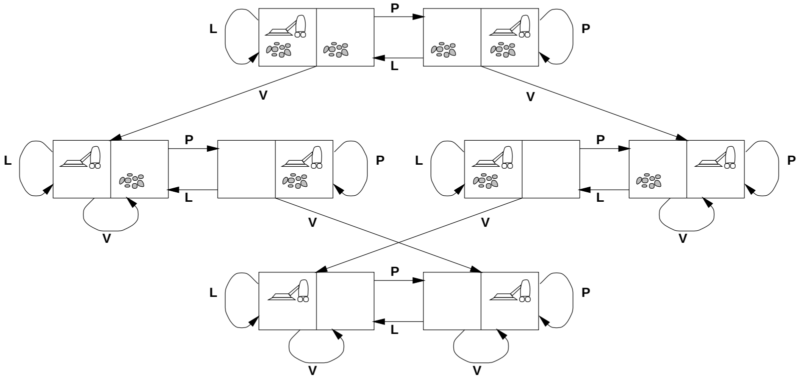
Řešení problému prohledáváním stavového prostoru:

- **stavový prostor**, předpoklady – statické a deterministické prostředí, diskrétní stavy
- *počáteční stav* **init(State)**
- *cílová podmínka* **goal(State)**
- *přechodové akce* **move(State,NewState)**

Prohledávací strategie – prohledávací strom:

- *kořenový uzel*
- *uzel* prohledávacího stromu:
  - *stav*
  - *rodičovský uzel*
  - *přechodová akce*
  - *hloubka uzlu*
  - *cena* – $g(n)$ cesty, $c(x, a, y)$ přechodu
- *(optimální) řešení*

Problém agenta Vysavače



- máme dvě **místnosti** (L, P)
- jeden **vysavač** (v L nebo P)
- v každé místnosti je/není špína
- počet **stavů** je $2 \times 2^2 = 8$
- **akce** $=\{doLeva, doPrava, Vysávej\}$

Další příklad – posunovačka

počáteční stav (např.)

7	2	4
5		6
8	3	1

$\longrightarrow$ . . . $\longrightarrow$

cílový stav

	1	2
3	4	5
6	7	8

- hra na čtvercové šachovnici $m \times m$ s $n = m^2 - 1$ očíslovanými kameny
- příklad pro šachovnici 3×3, posunování osmi kamenů (8-posunovačka)
- **stavy** – pozice včech kamenů
- **akce** – "pohyb" prázdného místa

☞ **Optimální řešení** obecné n-posunovačky je **NP-úplné**

Počet stavů u 8-posunovačky . . . $9!/2 = 181\,440$
u 15-posunovačky . . . 10^{13}
u 24-posunovačky . . . 10^{25}

Reálné problémy řešitelné prohledáváním

- hledání cesty z města A do města B
- hledání itineráře, problém obchodního cestujícího
- návrh VLSI čipu
- navigace auta, robota, ...
- postup práce automatické výrobní linky
- návrh proteinů – 3D-sekvence aminokyselin
- Internetové vyhledávání informací

Řešení problému prohledáváním

Kostra algoritmu:

```
solution(Solution) :- init(State),solve(State,Solution).

solve(State,[State]) :- goal(State).
solve(State,[State|Sol]) :- move(State,NewState),solve(NewState,Sol).
```

move(State,NewState) – definuje prohledávací **strategii**

Porovnání strategií:

- úplnost
- optimálnost
- časová složitost
- prostorová složitost

složitost závisí na:

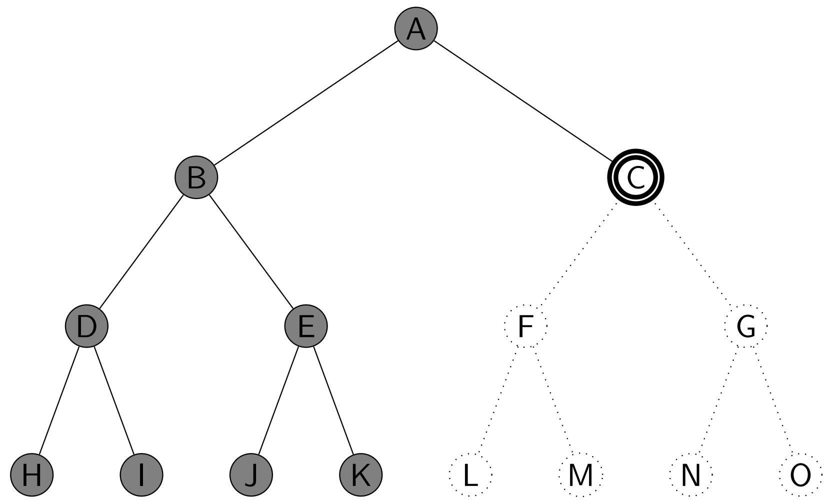
- b – faktor **větvení** (branching factor)
- d – hloubka cíle (goal depth)
- m – maximální hloubka větve/délka cesty (maximum depth/path, může být ∞?)

Neinformované prohledávání

- prohledávání do hloubky
- prohledávání do hloubky s limitem
- prohledávání do šířky
- prohledávání podle ceny
- prohledávání s postupným prohlubováním

Prohledávání do hloubky

Prohledává se vždy nejlevější a nejhlubší neexpandovaný uzel (*Depth-first Search, DFS*)



Prohledávání do hloubky

procedurální programovací jazyk – uzly se uloží do **zásobníku** (fronty LIFO) $\times$ Prolog – využití **rekurze**

```
solution(Node,Solution) :- depth_first_search([],Node,Solution).

depth_first_search(Path,Node,[Node|Path]) :- goal(Node).
depth_first_search(Path,Node,Sol) :- move(Node,Node1),
    \+ member(Node1,Path),depth_first_search([Node|Path],Node1,Sol).
```


Prohledávání do hloubky – vlastnosti

úplnost	**není** úplný (nekonečná větev, cykly)
optimálnost	**není** optimální
časová složitost	$O(b^m)$
prostorová složitost	$O(bm)$, lineární

Největší problém – nekonečná větev = nenajde se cíl, program neskončí!

Prohledávání do hloubky s limitem

Řešení nekonečné větve – použití "zarážky" = limit hloubky ℓ

```
solution(Node,Solution) :- depth_first_search_limit(Node,Solution,ℓ).

depth_first_search_limit(Node,[Node],_) :- goal(Node).
depth_first_search_limit(Node,[Node|Sol],MaxDepth) :- MaxDepth>0,
    move(Node,Node1), Max1 is MaxDepth-1,
    depth_first_search_limit(Node1,Sol,Max1).
```

neúspěch (**fail**) má dvě možné interpretace – **vyčerpání limitu** nebo **neexistenci řešení**

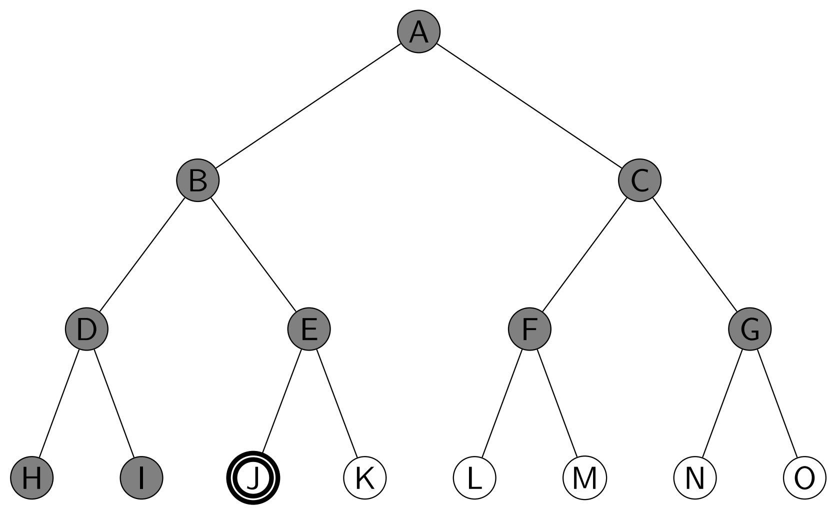
Vlastnosti:

úplnost	**není** úplný (pro $\ell < d$)
optimálnost	**není** optimální (pro $\ell > d$)
časová složitost	$O(b^\ell)$
prostorová složitost	$O(b\ell)$

dobrá volba limitu ℓ – podle znalosti problému

Prohledávání do šířky

Prohledává se vždy nejlevější neexpandovaný uzel s nejmenší hloubkou. (*Breadth-first Search, BFS*)



Prohledávání do šířky

procedurální programovací jazyk – uzly se uloží do **fronty** (FIFO) ×
Prolog – udržuje **seznam cest**

```
solution(Start,Solution) :- breadth_first_search([[Start]],Solution).

breadth_first_search([[Node|Path]|_],[Node|Path]) :- goal(Node).
breadth_first_search([[N|Path]|Paths],Solution) :-
    bagof([M,N|Path], (move(N,M),\+ member(M,[N|Path])), NewPaths),
    NewPaths\=[], append(Paths,NewPaths,Path1), !,
    breadth_first_search(Path1,Solution); breadth_first_search(Paths,Solution).
```

bagof(+Prom,+Cíl,-Sezn) postupně vyhodnocuje **Cíl** a všechny vyhovující instance **Prom** řadí do seznamu **Sezn**

p :- a,b;c. ⇔ p :- (a,b);c.

Vylepšení:

- **append** ⟶ **append_dl**
- seznam cest:

[[a]]		**l(a)**
[[b,a],[c,a]]	⟶	**t(a,[l(b),l(c)])**
[[c,a],[d,b,a],[e,b,a]]		**t(a,[t(b,[l(d),l(e)]),l(c)])**
[[d,b,a],[e,b,a],[f,c,a],[g,c,a]]		**t(a,[t(b,[l(d),l(e)]),t(c,[l(f),l(g)])])**

Prohledávání do šířky – vlastnosti

úplnost	**je** úplný (pro konečné b)
optimálnost	**je** optimální podle délky cesty/**není** optimální podle obecné ceny
časová složitost	$1 + b + b^2 + b^3 + \ldots + b^d + b(b^d - 1) = O(b^{d+1})$, exponenciální v d
prostorová složitost	$O(b^{d+1})$ (každý uzel v paměti)

Největší problém – paměť:

Hloubka	Uzlů	Čas	Paměť
2	1100	0.11 sek	1 MB
4	111 100	11 sek	106 MB
6	10^7	19 min	10 GB
8	10^9	31 hod	1 TB
10	10^{11}	129 dnů	101 TB
12	10^{13}	35 let	10 PB
14	10^{15}	3 523 let	1 EB

Ani čas není dobrý → potřebujeme **informované** strategie prohledávání.

Prohledávání podle ceny

- BFS je optimální pro rovnoměrně ohodnocené stromy × **prohledávání podle ceny** (**Uniform-cost Search**) je optimální pro **obecné ohodnocení**
- fronta uzlů se udržuje **uspořádaná** podle ceny cesty

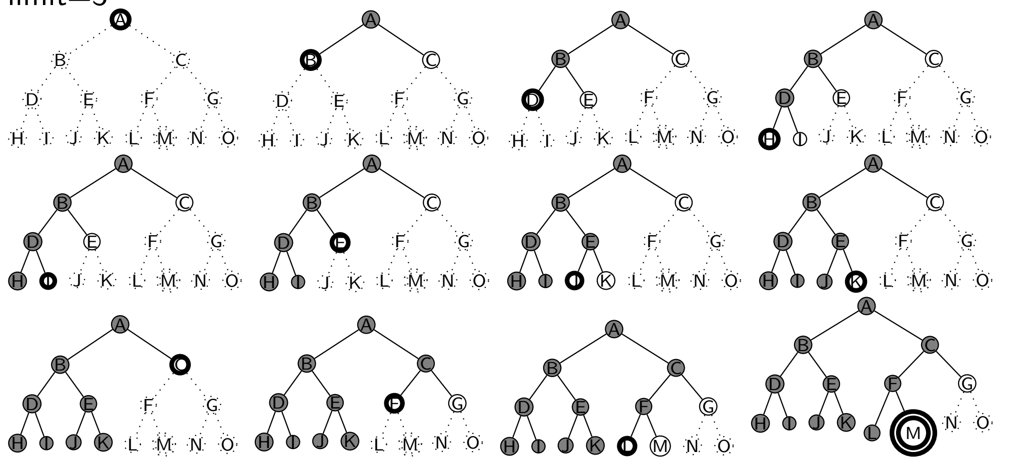
Vlastnosti:

úplnost	**je** úplný (pro cena $\geq \epsilon$)
optimálnost	**je** optimální (pro cena $\geq \epsilon$, $g(n)$ roste)
časová složitost	počet uzlů s $g \leq C^*$, $O(b^{1+\lfloor C^*/\epsilon \rfloor})$, kde $C^* \ldots$ cena optimálního řešení
prostorová složitost	počet uzlů s $g \leq C^*$, $O(b^{1+\lfloor C^*/\epsilon \rfloor})$

Prohledávání s postupným prohlubováním

prohledávání do hloubky s postupně se **zvyšujícím limitem** (**Iterative deepening DFS**, **IDS**)

limit=3



Prohledávání s postupným prohlubováním – vlastnosti

úplnost	**je** úplný (pro konečné b)
optimálnost	**je** optimální (pro $g(n)$ rovnoměrně neklesající funkce hloubky)
časová složitost	$d(b) + (d-1)b^2 + \ldots + 1(b^d) = O(b^d)$
prostorová složitost	$O(bd)$

- kombinuje výhody BFS a DFS:
  - nízké paměťové nároky – lineární
  - optimálnost, úplnost
- zdánlivé plýtvání opakovaným generováním
  ALE generuje o jednu úroveň míň, např. pro $b = 10, d = 5$:

$$N(\mathrm{IDS}) = 50 + 400 + 3\,000 + 20\,000 + 100\,000 = 123\,450$$
$$N(\mathrm{BFS}) = 10 + 100 + 1\,000 + 10\,000 + 100\,000 + 999\,990 = 1\,111\,100$$

IDS je **nejvhodnější** neinformovaná strategie pro **velké prostory** a **neznámou hloubku** řešení.

Shrnutí vlastností algoritmů neinformovaného prohledávání

Vlastnost	*do hloubky*	*do hloubky s limitem*	*do šířky*	*podle ceny*	*s postupným prohlubováním*
úplnost	ne	ano, pro $l \geq d$	ano*	ano*	ano*
optimálnost	ne	ne	ano*	ano*	ano*
časová složitost	$O(b^m)$	$O(b^\ell)$	$O(b^{d+1})$	$O(b^{1+\lfloor C^*/\epsilon \rfloor})$	$O(b^d)$
prostorová složitost	$O(bm)$	$O(b\ell)$	$O(b^{d+1})$	$O(b^{1+\lfloor C^*/\epsilon \rfloor})$	$O(bd)$