

## Hry a základní herní strategie

Aleš Horák

E-mail: `hales@fi.muni.cz`

`http://nlp.fi.muni.cz/uui/`

Obsah:

- Připomínka 2 – průběžná písemka
- Hry vs. Prohledávání stavového prostoru
- Algoritmus Minimax
- Algoritmus Alfa-Beta prořezávání
- Nedeterministické hry
- Hry s nepřesnými znalostmi

## PŘIPOMÍNKA 2 – PRŮBĚŽNÁ PÍSEMKA

- termín – **příští přednášku, 1. listopadu, 12:00, D2**, na začátku přednášky
- náhradní termín: **není**
- příklady (formou testu – odpovědi A, B, C, D, E, z látky probrané prvních pěti přednáškách, včetně dnešní):
  - uveden příklad v Prologu, otázka **Co řeší tento program?**
  - uveden příklad v Prologu a cíl, otázka **Co je (návratová) hodnota výsledku?**
  - **upravte** (doplňte/zmeňte řádek) uvedený **program tak, aby...**
  - uvedeno několik **tvrzení**, potvrďte jejich pravdivost/nepravdivost
  - porovnání **vlastností** několika **algoritmů**
- rozsah: **4 příklady**
- hodnocení: **max. 32 bodů** – za *správnou odpověď* 8 bodů, za *žádnou odpověď* 0 bodů, za *špatnou odpověď* -3 bodů.

## HRY × PROHLEDÁVÁNÍ STAVOVÉHO PROSTORU

### Multiagentní prostředí:

- agent musí brát v úvahu **akce jiných agentů** → jak ovlivní jeho vlastní prospěch
- vliv ostatních agentů – **prvek náhody**
- **kooperativní** × **soupeřící** multiagentní prostředí (MP)

### Hry:

- matematická **teorie her** (odvětví ekonomie) – kooperativní i soupeřící MP, kde vliv všech agentů je **významný**
- **hra v UI** = obv. deterministické MP, 2 střídající se agenti, výsledek hry je vzájemně opačný nebo shoda

### Algoritmy soupeřícího prohledávání (*adversarial search*):

- oponent dělá **dopředu neurčitelné** tahy → řešením je **strategie**, která počítá se všemi možnými tahy protivníka
- **časový limit** ⇒ zřejmě nenajdeme optimální řešení → hledáme **lokálně optimální** řešení

## HRY A UI – HISTORIE

- Babbage, 1846 – počítač porovnává přínos různých herních tahů
- von Neumann, 1944 – algoritmy perfektní hry
- Zuse, Wiener, Shannon, 1945–50 – přibližné vyhodnocování
- Turing, 1951 – první šachový program (jen na papíře)
- Samuel, 1952–57 – strojové učení pro zpřesnění vyhodnocování
- McCarthy, 1956 – prořezávání pro možnost hlubšího prohledávání

## HRY A UI – HISTORIE

- Babbage, 1846 – počítač porovnává přínos různých herních tahů
- von Neumann, 1944 – algoritmy perfektní hry
- Zuse, Wiener, Shannon, 1945–50 – přibližné vyhodnocování
- Turing, 1951 – první šachový program (jen na papíře)
- Samuel, 1952–57 – strojové učení pro zpřesnění vyhodnocování
- McCarthy, 1956 – prořezávání pro možnost hlubšího prohledávání

řešení her je zajímavým předmětem studia ← je **obtížné**:

průměrný faktor větvení v šachách  $b = 35$

pro 50 tahů 2 hráčů ... prohledávací strom  $\approx 35^{100} \approx 10^{154}$  uzlů ( $\approx 10^{40}$  stavů)

## HRY A UI – AKTUÁLNÍ VÝSLEDKY

- ❑ **dáma** – 1994 program *Chinook* porazil světovou šampionku Marion Tinsley. Používá úplnou databázi tahů pro  $\leq 8$  figur (443 748 401 247 pozic).
- ❑ **šachy** – 1997 porazil stroj *Deep Blue* světového šampiona Gary Kasparova 3½–2½. Stroj počítá 200 mil. pozic/s, sofistikované vyhodnocování a nezveřejněné metody pro prozkoumávání některých tahů až do hloubky 40 tahů. 2006 porazil program *Deep Fritz* na PC světového šampiona Vladimíra Kramníka 2–4. V současnosti vyhrávají turnaje i programy na slabším hardware mobilních telefonů s 20 tis. pozic/s.
- ❑ **Othello** – světoví šampioni odmítají hrát s počítači, protože stroje jsou příliš dobré. Othello (též Reversi) pro dva hráče na desce  $8 \times 8$  – snaží se mezi své dva kameny uzavřít soupeřovy, které se přebarví. Až se zaplní deska, spočítají se kameny.
- ❑ **Go** – do roku 2008 světoví šampioni odmítali hrát s počítači, protože stroje jsou příliš slabé. V Go je  $b > 300$ , takže počítače mohou používat téměř pouze znalostní bázi vzorových her.  
od 2009 – první programy dosahují pokročilejší amatérské úrovně (zejména na desce  $9 \times 9$ , nižší úroveň i na  $19 \times 19$ ).

## TYPY HER

	<i>deterministické</i>	<i>s náhodou</i>
<i>perfektní znalosti</i>	šachy, dáma, Go, Othello	backgammon, monopoly
<i>nepřesné znalosti</i>		bridge, poker, scrabble

## HLEDÁNÍ OPTIMÁLNÍHO TAHU

2 hráči – **MAX** a **MIN**, MAX je první na tahu a pak se střídají až do konce hry

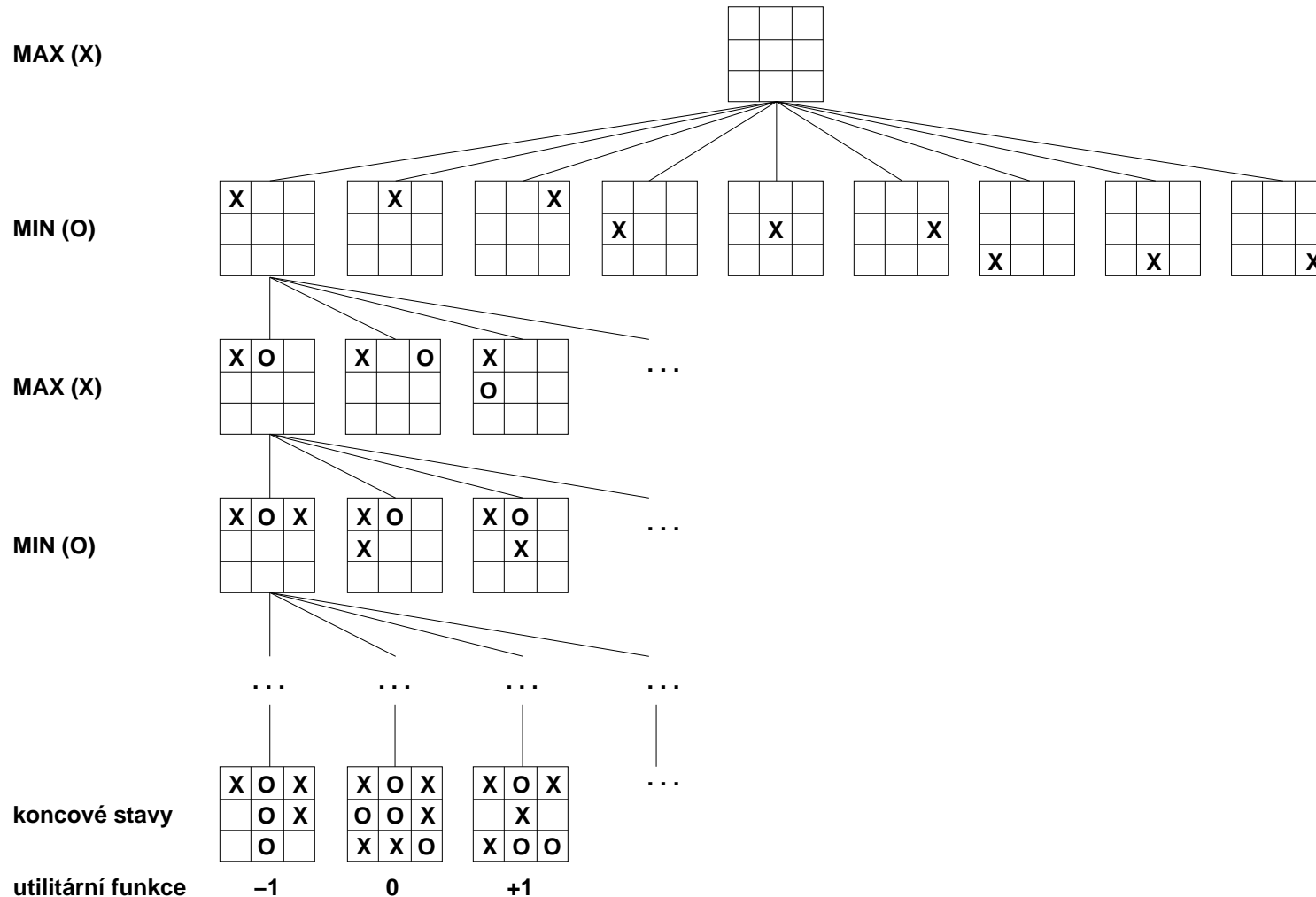
hra = prohledávací problém:

- ❑ **počáteční stav** – počáteční herní situace + kdo je na tahu
- ❑ **přechodová funkce** – vrací dvojice (legální tah, výsledný stav)
- ❑ **ukončovací podmínka** – určuje, kdy hra končí, označuje **koncové stavy**
- ❑ **utilitární funkce** – numerické ohodnocení koncových stavů



## HLEDÁNÍ OPTIMÁLNÍHO TAHU pokrač.

počáteční stav a přechodová funkce definují **herní strom**:



## ALGORITMUS MINIMAX

MAX ( $\triangle$ ) musí *prohledat* herní strom pro zjištění nejlepšího tahu proti MIN ( $\nabla$ )

→ zjistit nejlepší **hodnotu minimax** – zajišťuje *nejlepší výsledek* proti *nejlepšímu protivníkovi*

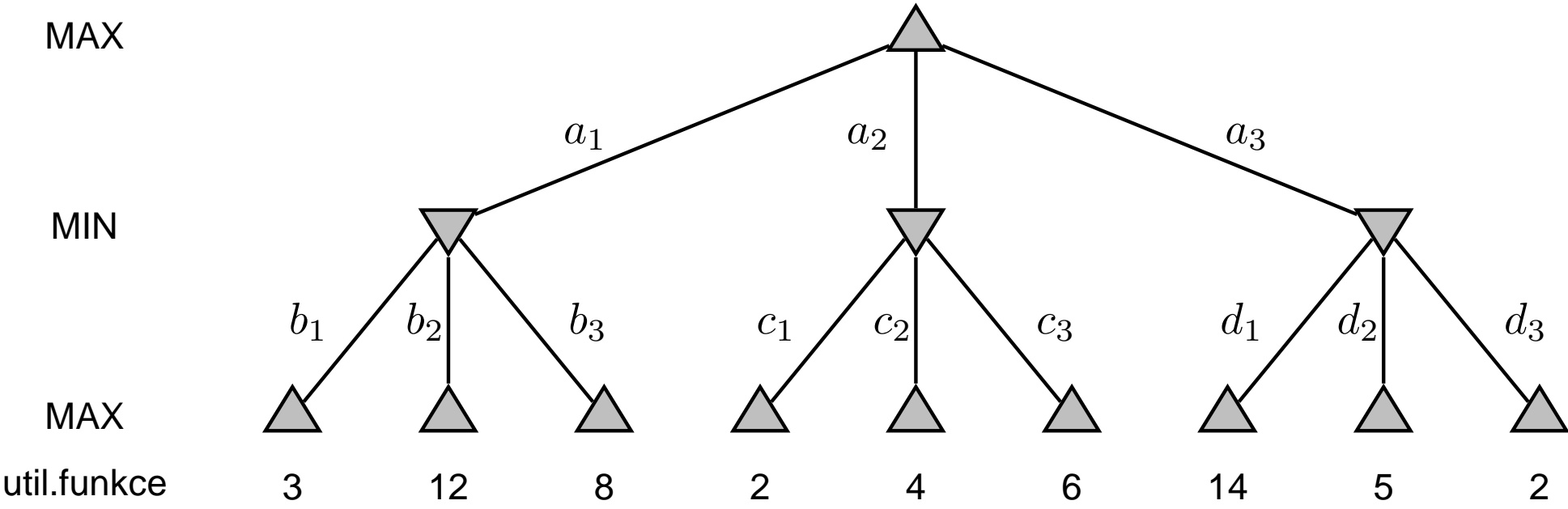
$$\text{Hodnota minimax}(n) = \begin{cases} \text{utility}(n) & \text{pro koncový stav } n \\ \max_{s \in \text{moves}(n)} \text{Hodnota minimax}(s) & \text{pro MAX uzel } n \\ \min_{s \in \text{moves}(n)} \text{Hodnota minimax}(s) & \text{pro MIN uzel } n \end{cases}$$

## ALGORITMUS MINIMAX pokrač.

příklad – hra jen na jedno kolo = 2 tahy (půlkola)

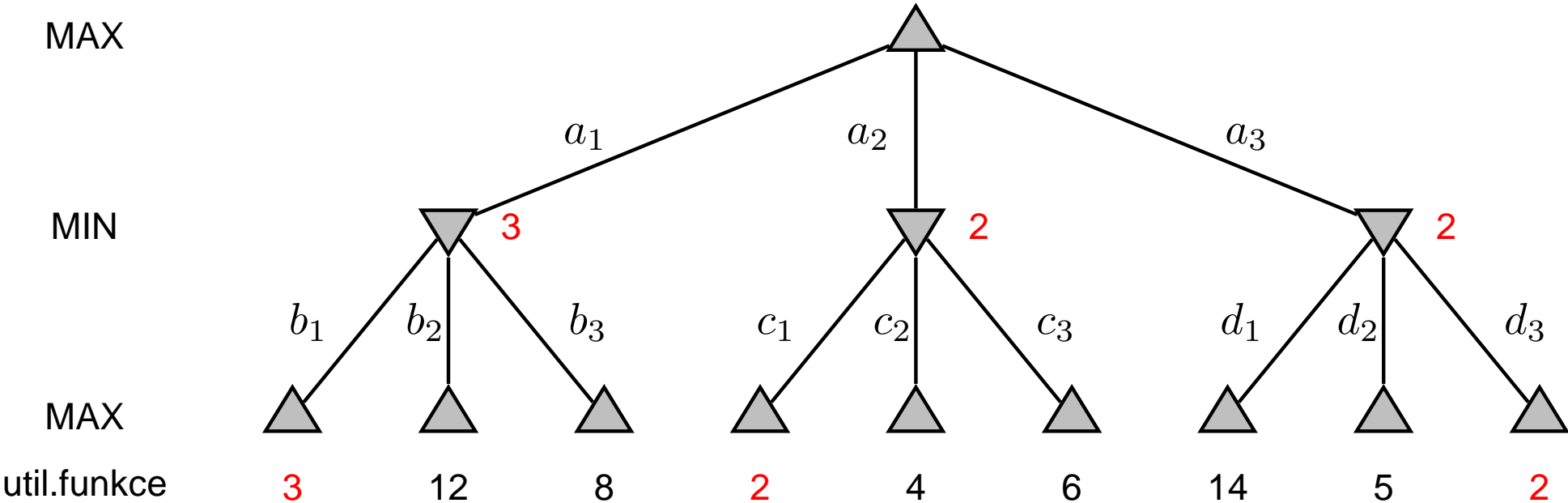
# ALGORITMUS MINIMAX pokrač.

příklad – hra jen na jedno kolo = 2 tahy (půlkola)



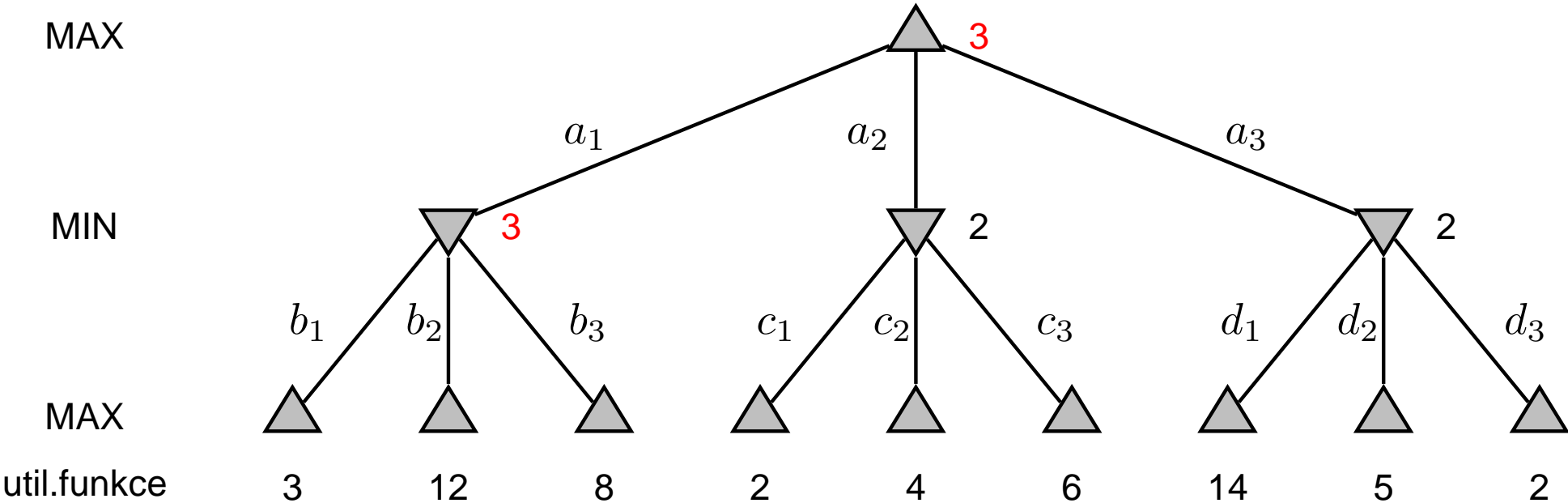
# ALGORITMUS MINIMAX pokrač.

příklad – hra jen na jedno kolo = 2 tahy (půlkola)



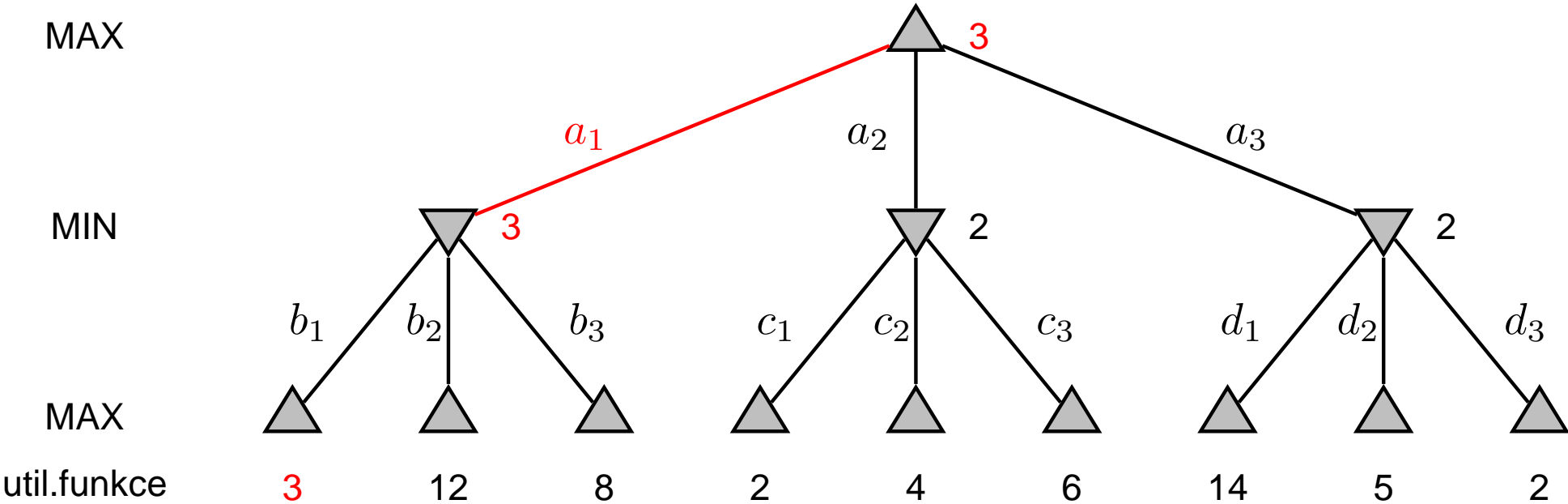
# ALGORITMUS MINIMAX pokrač.

příklad – hra jen na jedno kolo = 2 tahy (půlkola)



# ALGORITMUS MINIMAX pokrač.

příklad – hra jen na jedno kolo = 2 tahy (půlkola)



## ALGORITMUS MINIMAX pokrač.

```

% minimax( Pos, BestSucc, Val ):
%   Pos je rozložení figur , Val je minimaxová hodnota tohoto rozložení ;
%   nejlepší tah z Pos vede do rozložení BestSucc
minimax( Pos, BestSucc, Val ) :-
    moves( Pos, PosList, !,                % PosList je seznam legálních tahů z Pos
    best( PosList, BestSucc, Val )
    ;
    staticval ( Pos, Val).                % Pos nemá následníky: ohodnotíme staticky

best( [ Pos ], Pos, Val ) :-
    minimax( Pos, _, Val ), !.
best( [ Pos1 | PosList ], BestPos, BestVal ) :-
    minimax( Pos1, _, Val1 ),
    best( PosList, Pos2, Val2 ),
    betterof ( Pos1, Val1, Pos2, Val2, BestPos, BestVal ).
betterof ( Pos0, Val0, Pos1, Val1, Pos0, Val0 ) :- % Pos0 je lepší než Pos1
    min_to_move( Pos0),                          % MIN na tahu v Pos0
    Val0 > Val1, !                               % MAX chce nejvyšší hodnotu
    ;
    max_to_move( Pos0),                          % MAX na tahu v Pos0
    Val0 < Val1, !                               % MIN chce nejmenší hodnotu
    betterof ( Pos0, Val0, Pos1, Val1, Pos1, Val1 ). % jinak je Pos1 lepší než Pos0
    
```



## ALGORITMUS MINIMAX – VLASTNOSTI

*úplnost*

*optimálnost*

*časová složitost*

*prostorová složitost*

## ALGORITMUS MINIMAX – VLASTNOSTI

*úplnost*                      úplný pouze pro **konečné** stromy

*optimálnost*

*časová složitost*

*prostorová složitost*

## ALGORITMUS MINIMAX – VLASTNOSTI

*úplnost*

úplný pouze pro **konečné** stromy

*optimálnost*

je optimální proti optimálnímu oponentovi

*časová složitost*

*prostorová složitost*

## ALGORITMUS MINIMAX – VLASTNOSTI

*úplnost*

úplný pouze pro **konečné** stromy

*optimálnost*

je optimální proti optimálnímu oponentovi

*časová složitost*

$O(b^m)$

*prostorová složitost*

## ALGORITMUS MINIMAX – VLASTNOSTI

<i>úplnost</i>	úplný pouze pro <b>konečné</b> stromy
<i>optimálnost</i>	<b>je</b> optimální proti optimálnímu oponentovi
<i>časová složitost</i>	$O(b^m)$
<i>prostorová složitost</i>	$O(bm)$ , prohledávání do hloubky

## ALGORITMUS MINIMAX – VLASTNOSTI

<i>úplnost</i>	úplný pouze pro <b>konečné</b> stromy
<i>optimálnost</i>	<b>je</b> optimální proti optimálnímu oponentovi
<i>časová složitost</i>	$O(b^m)$
<i>prostorová složitost</i>	$O(bm)$ , prohledávání do hloubky

šachy ...  $b \approx 35, m \approx 100 \Rightarrow$  přesné řešení není možné

např.  $b^m = 10^6, b = 35 \Rightarrow m \approx 4$

4-tahy  $\approx$  člověk-nováček

8-tahů  $\approx$  člověk-mistr, typické PC

12-tahů  $\approx$  Deep Blue, Kasparov

## ČASOVÉ OMEZENÍ

předpokládejme, že máme 100 sekund + prozkoumáme  $10^4$  uzlů/s  $\Rightarrow 10^6$  uzlů na 1 tah

řešení:

- ❑ **ohodnocovací funkce** odhad přínosu pozice
- ❑ **ořezávací test** (*cutoff test*) – např. hloubka nebo hodnota ohodnocovací funkce

## ALGORITMUS ALFA-BETA PROŘEZÁVÁNÍ

Příklad stromu, který zpracuje predikát **minmax**

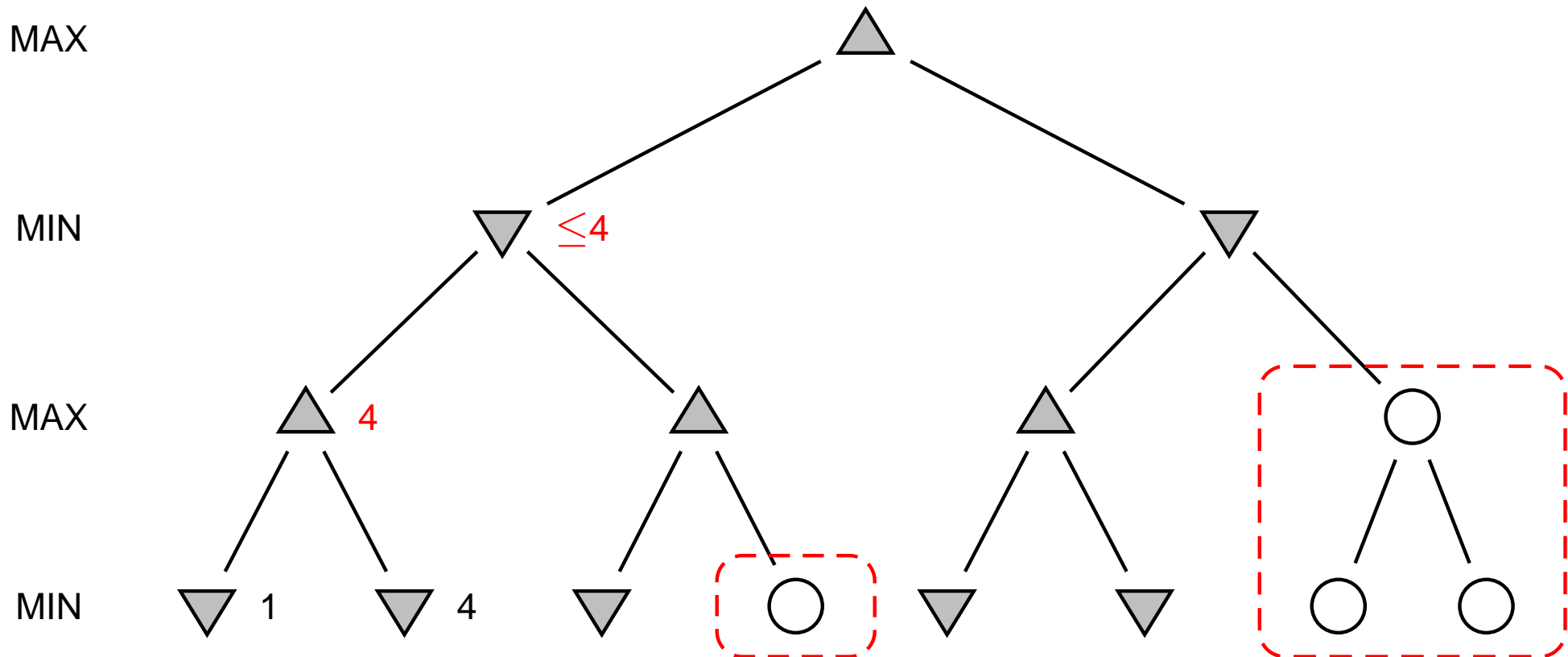
Alfa-Beta **odřízne** expanzi některý uzlů  $\Rightarrow$  Alfa-Beta procedura je **efektivnější** variantou minimaxu



## ALGORITMUS ALFA-BETA PROŘEZÁVÁNÍ

Příklad stromu, který zpracuje predikát **minmax**

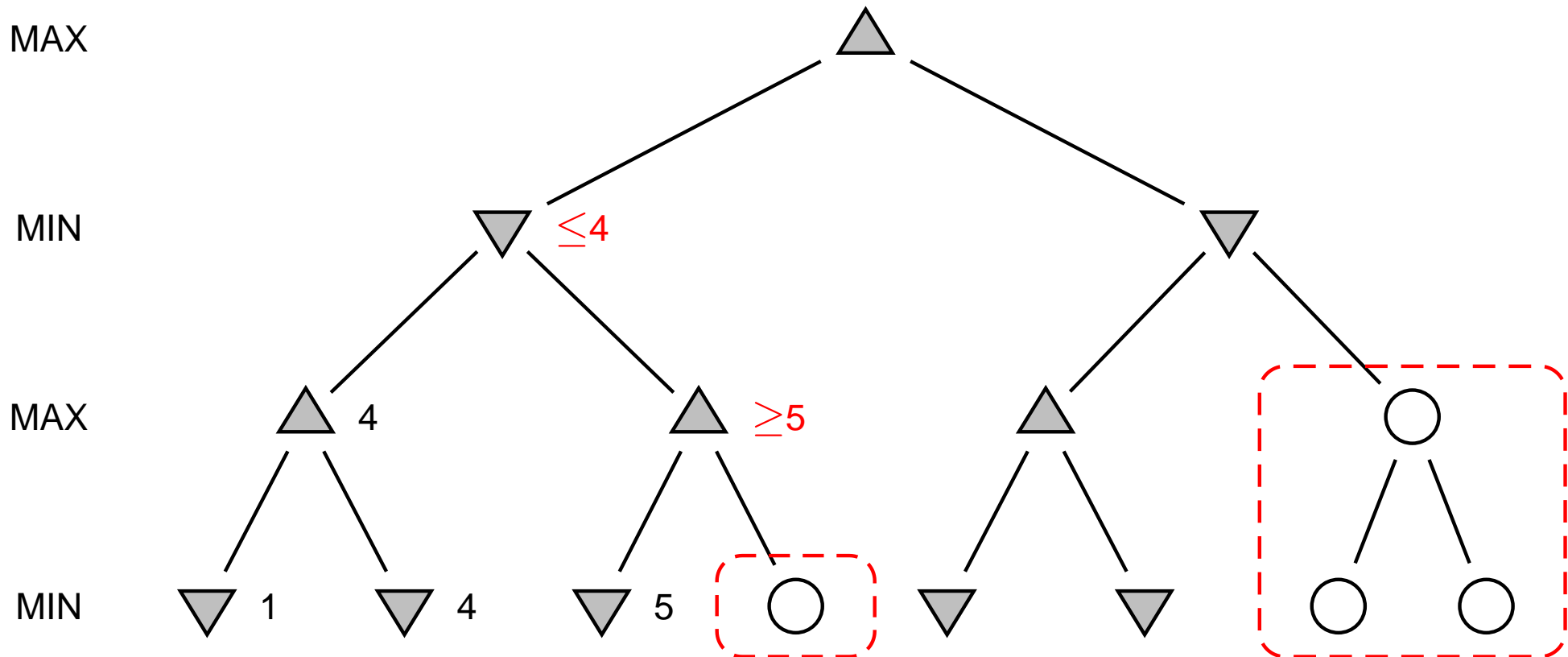
Alfa-Beta **odřízne** expanzi některých uzlů  $\Rightarrow$  Alfa-Beta procedura je **efektivnější** variantou minimaxu



## ALGORITMUS ALFA-BETA PROŘEZÁVÁNÍ

Příklad stromu, který zpracuje predikát **minmax**

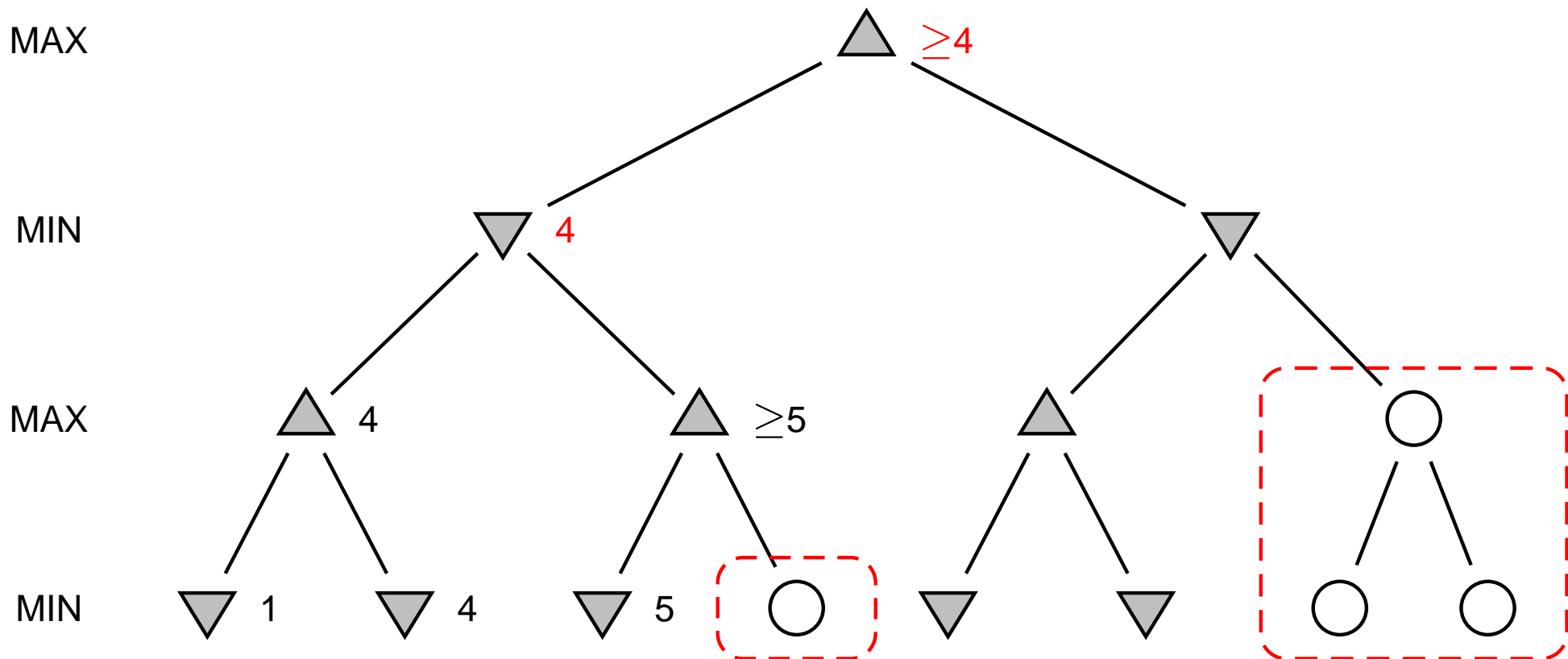
Alfa-Beta **odřízne** expanzi některý uzlů  $\Rightarrow$  Alfa-Beta procedura je **efektivnější** variantou minimaxu



## ALGORITMUS ALFA-BETA PROŘEZÁVÁNÍ

Příklad stromu, který zpracuje predikát **minmax**

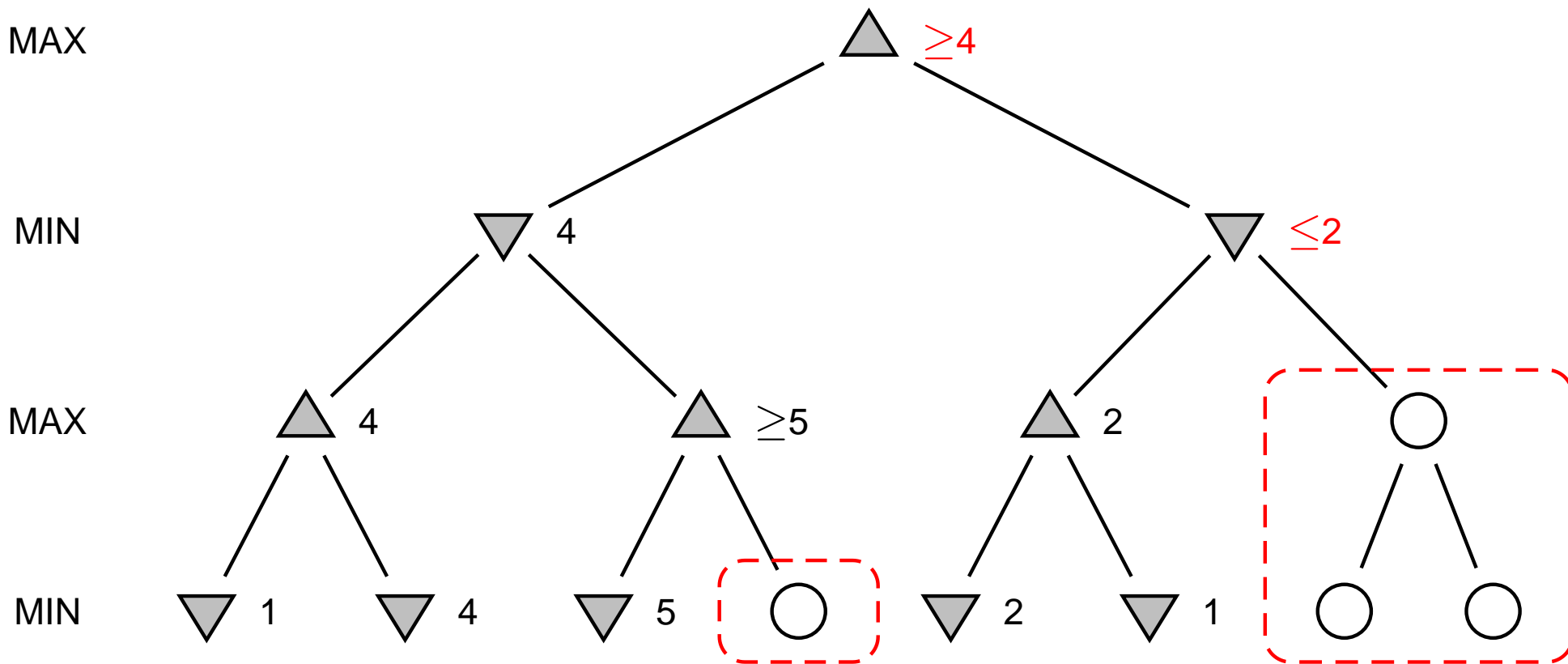
Alfa-Beta **odřízne** expanzi některých uzlů  $\Rightarrow$  Alfa-Beta procedura je **efektivnější** variantou minimaxu



## ALGORITMUS ALFA-BETA PROŘEZÁVÁNÍ

Příklad stromu, který zpracuje predikát **minmax**

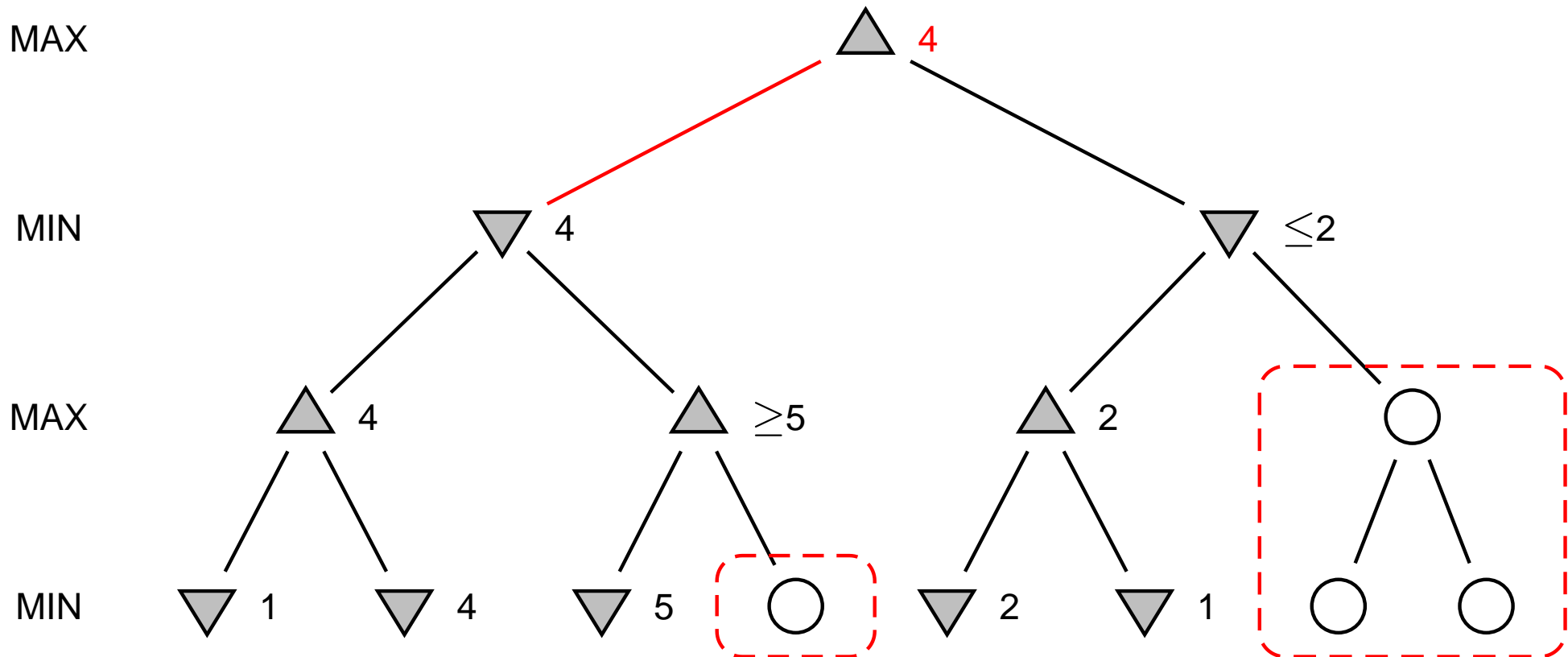
Alfa-Beta **odřízne** expanzi některých uzlů  $\Rightarrow$  Alfa-Beta procedura je **efektivnější** variantou minimaxu



## ALGORITMUS ALFA-BETA PROŘEZÁVÁNÍ

Příklad stromu, který zpracuje predikát **minmax**

Alfa-Beta **odřízne** expanzi některých uzlů  $\Rightarrow$  Alfa-Beta procedura je **efektivnější** variantou minimaxu



## ALGORITMUS ALFA-BETA – VLASTNOSTI

- prořezávání **neovlivní** výsledek  $\Rightarrow$  je **stejný** jako u minimaxu
- dobré **uspořádání** přechodů (možných tahů) ovlivní **efektivitu** prořezávání
- v případě “nejlepšího” uspořádání **časová složitost** =  $O(b^{m/2})$ 
  - $\Rightarrow$  **zdvojí** hloubku prohledávání
  - $\Rightarrow$  může snadno dosáhnout hloubky 8 v šachu, což už je použitelná úroveň

## ALGORITMUS ALFA-BETA – VLASTNOSTI

- prořezávání **neovlivní** výsledek  $\Rightarrow$  je **stejný** jako u minimaxu
- dobré **uspořádání** přechodů (možných tahů) ovlivní **efektivitu** prořezávání
- v případě “nejlepšího” uspořádání **časová složitost** =  $O(b^{m/2})$ 
  - $\Rightarrow$  **zdvojí** hloubku prohledávání
  - $\Rightarrow$  může snadno dosáhnout hloubky 8 v šachu, což už je použitelná úroveň

označení  $\alpha - \beta$ :

- $\alpha$  ... doposud nejlepší hodnota pro MAXe
- $\beta$  ... doposud nejlepší hodnota pro MINa
- $\langle \alpha, \beta \rangle$  ... interval ohodnocovací funkce v průběhu výpočtu (na začátku  $\langle -\infty, \infty \rangle$ )

→ minimax ...  $V(P)$                        $\alpha - \beta$  ...  $V(P, \alpha, \beta)$

když  $V(P) \leq \alpha$                        $V(P, \alpha, \beta) = \alpha$

když  $\alpha < V(P) < \beta$                        $V(P, \alpha, \beta) = V(P)$

když  $V(P) \geq \beta$                        $V(P, \alpha, \beta) = \beta$

## ALGORITMUS ALFA-BETA PROŘEZÁVÁNÍ

```

alphabeta( Pos, Alpha, Beta, GoodPos, Val) :- moves( Pos, PosList), !,
    boundedbest( PosList, Alpha, Beta, GoodPos, Val);
    staticval ( Pos, Val). % statické ohodnocení Pos
    
```

```

boundedbest( [Pos | PosList], Alpha, Beta, GoodPos, GoodVal) :-
    alphabeta( Pos, Alpha, Beta, _, Val),
    goodenough( PosList, Alpha, Beta, Pos, Val, GoodPos, GoodVal).
    
```

```

goodenough( [], _, _, Pos, Val, Pos, Val) :- !. % nejsou další kandidáti
goodenough( _, Alpha, Beta, Pos, Val, Pos, Val) :-
    min_to_move( Pos), Val > Beta, ! % MAX dosáhl horní hranici
    ; max_to_move( Pos), Val < Alpha, !. % MIN dosáhl dolní hranici
goodenough( PosList, Alpha, Beta, Pos, Val, GoodPos, GoodVal) :-
    newbounds( Alpha, Beta, Pos, Val, NewAlpha, NewBeta), % uprav hranice
    boundedbest( PosList, NewAlpha, NewBeta, Pos1, Val1),
    betterof( Pos, Val, Pos1, Val1, GoodPos, GoodVal).
    
```

```

newbounds( Alpha, Beta, Pos, Val, Val, Beta) :-
    min_to_move( Pos), Val > Alpha, !. % MAX zvýšil dolní hranici
newbounds( Alpha, Beta, Pos, Val, Alpha, Val) :-
    max_to_move( Pos), Val < Beta, !. % MIN snížil horní hranici
newbounds( Alpha, Beta, _, _, Alpha, Beta). % jinak hranice nezměněny
    
```

```

betterof( Pos, Val, Pos1, Val1, Pos, Val) :- min_to_move( Pos), Val > Val1, !
    ; max_to_move( Pos), Val < Val1, !. % Pos je lepší než Pos1
betterof( _, _, Pos1, Val1, Pos1, Val1). % jinak je lepší Pos1
    
```



## MOŽNOSTI VYLEPŠENÍ MINIMAXU

**minimax\_cutoff** je stejný jako **minimax** kromě:

1. koncový test → *ořezávací test*
2. užitární funkce → *ohodnocovací funkce*

## MOŽNOSTI VYLEPŠENÍ MINIMAXU

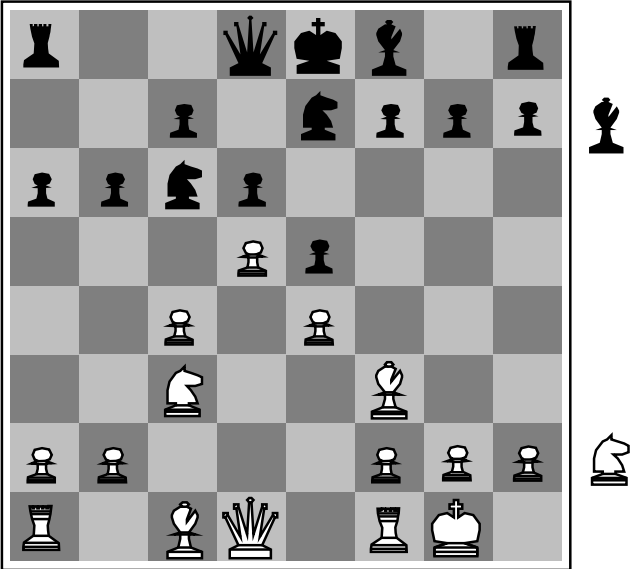
**minimax\_cutoff** je stejný jako **minimax** kromě:

1. koncový test → *ořezávací test*
2. užitá funkce → *ohodnocovací funkce*

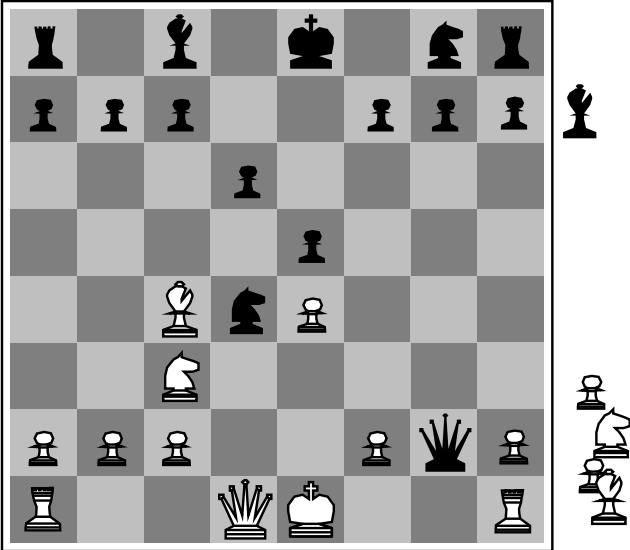
další možnosti vylepšení:

- vyhodnocovat pouze **klidné stavy** (quiescent search)
- při vyhodnocování počítat s efektem **horizontu** – zvraty mimo prohledanou oblast
- **dopředné ořezávání** – některé stavy se ihned zahazují  
bezpečné např. pro symetrické tahy nebo pro tahy hluboko ve stromu

# OHODNOCOVACÍ FUNKCE

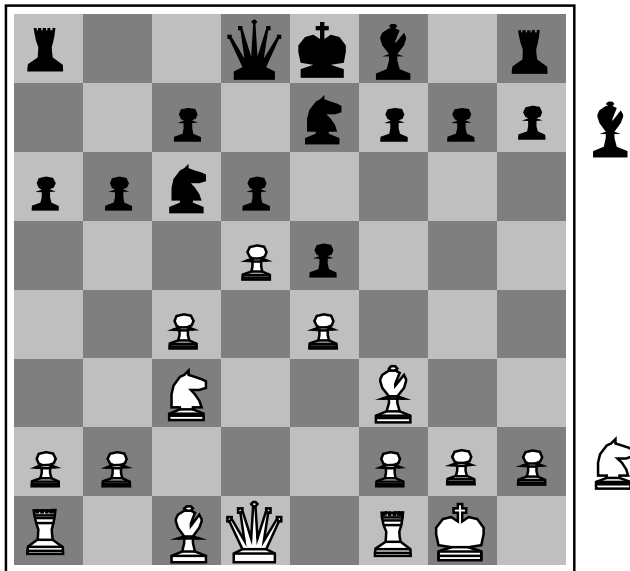


Černý na tahu  
 Bílý ma o něco lepší pozici

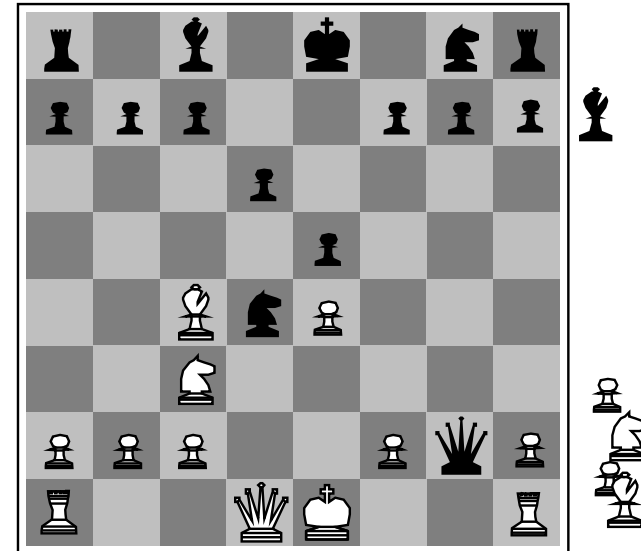


Bílý na tahu  
 Černý vítězí

## OHODNOCOVACÍ FUNKCE



Černý na tahu  
Bílý ma o něco lepší pozici



Bílý na tahu  
Černý vítězí

Pro šachy typicky **lineární** vážený součet **rysů**

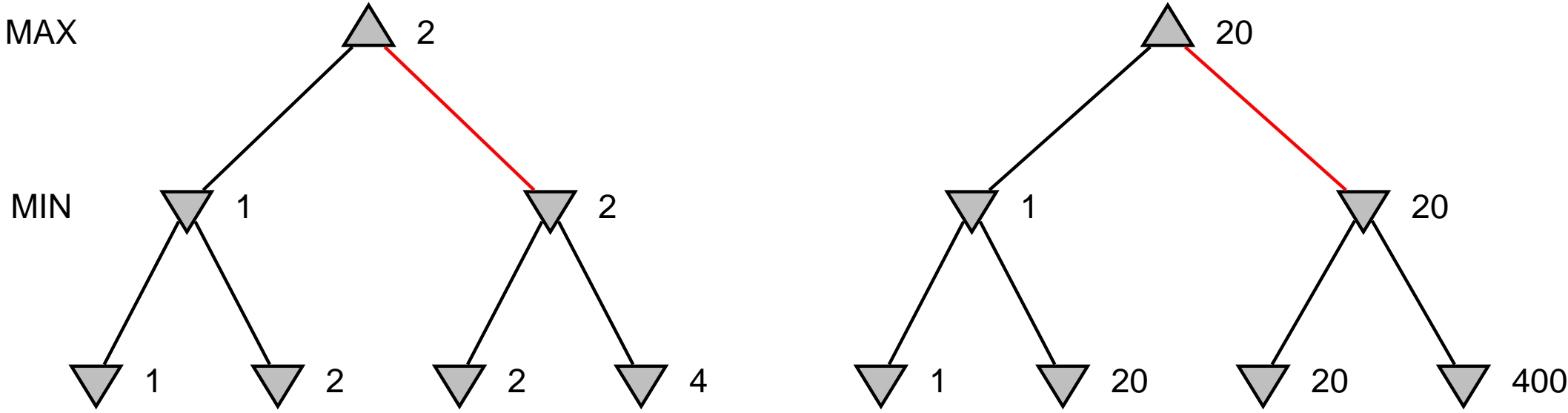
$$Eval(s) = w_1 f_1(s) + w_2 f_2(s) + \dots + w_n f_n(s) = \sum_{i=1}^n w_i f_i(s)$$

např.  $w_1 = 9$

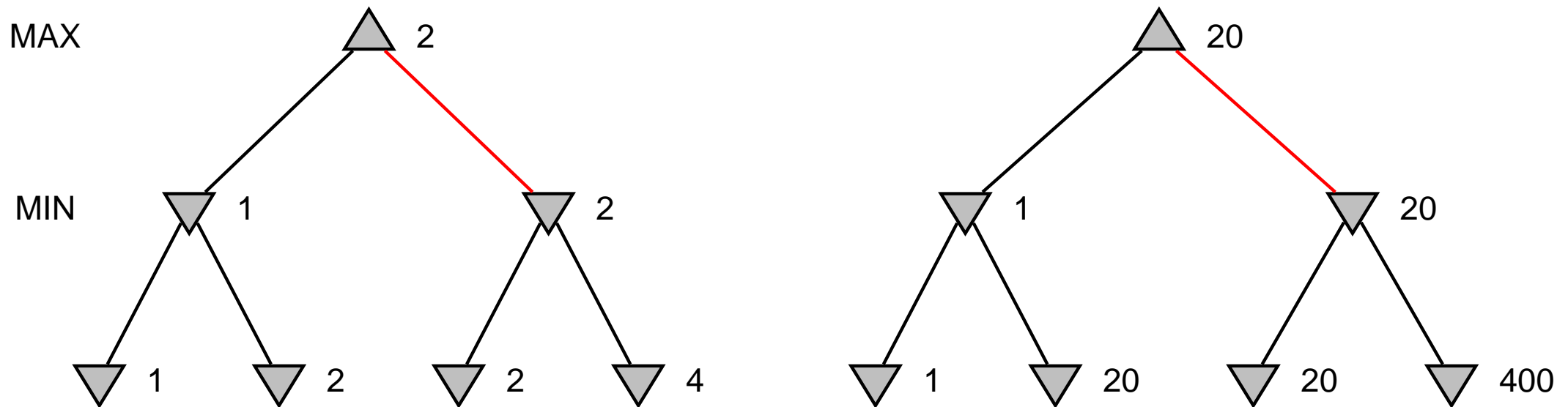
$f_1(s) = (\text{počet bílých královen}) - (\text{počet černých královen})$

...

# OHODNOCOVACÍ FUNKCE – ODCHYLKY



## OHODNOCOVACÍ FUNKCE – ODCHYLKY



chová se **stejně** pro libovolnou **monotónní** transformaci funkce  $Eval$

záleží pouze na uspořádání  $\rightarrow$  ohodnocení v deterministické hře funguje jako **ordinální funkce**

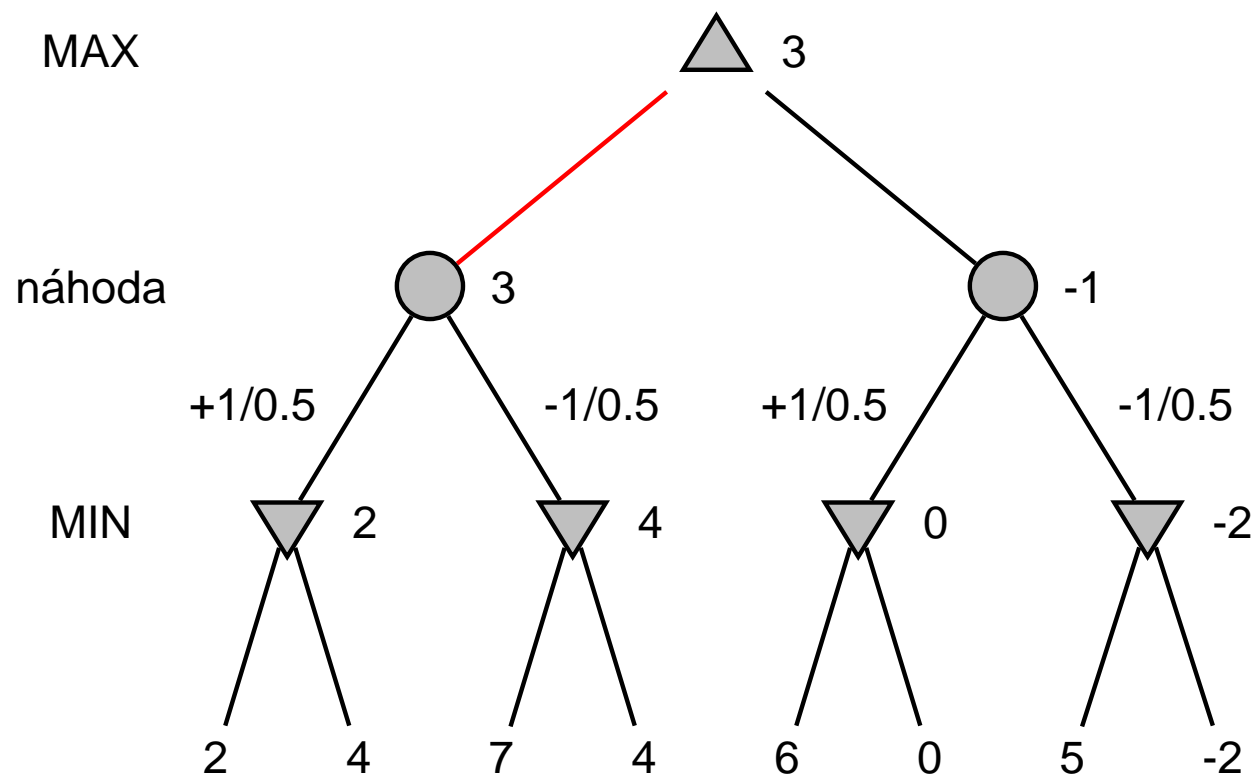
## NEDETERMINISTICKÉ HRY

náhoda ←— hod kostkou, hod mincí, míchání karet

## NEDETERMINISTICKÉ HRY

náhoda ← hod kostkou, hod mincí, míchání karet

příklad – 1 tah s házením mincí:





## ALGORITMUS MINIMAX PRO NEDETERMINISTICKÉ HRY

**expect\_minimax** ... počítá perfektní hru s přihlédnutím k náhodě

rozdíl je pouze v započítání uzlů *náhoda*:

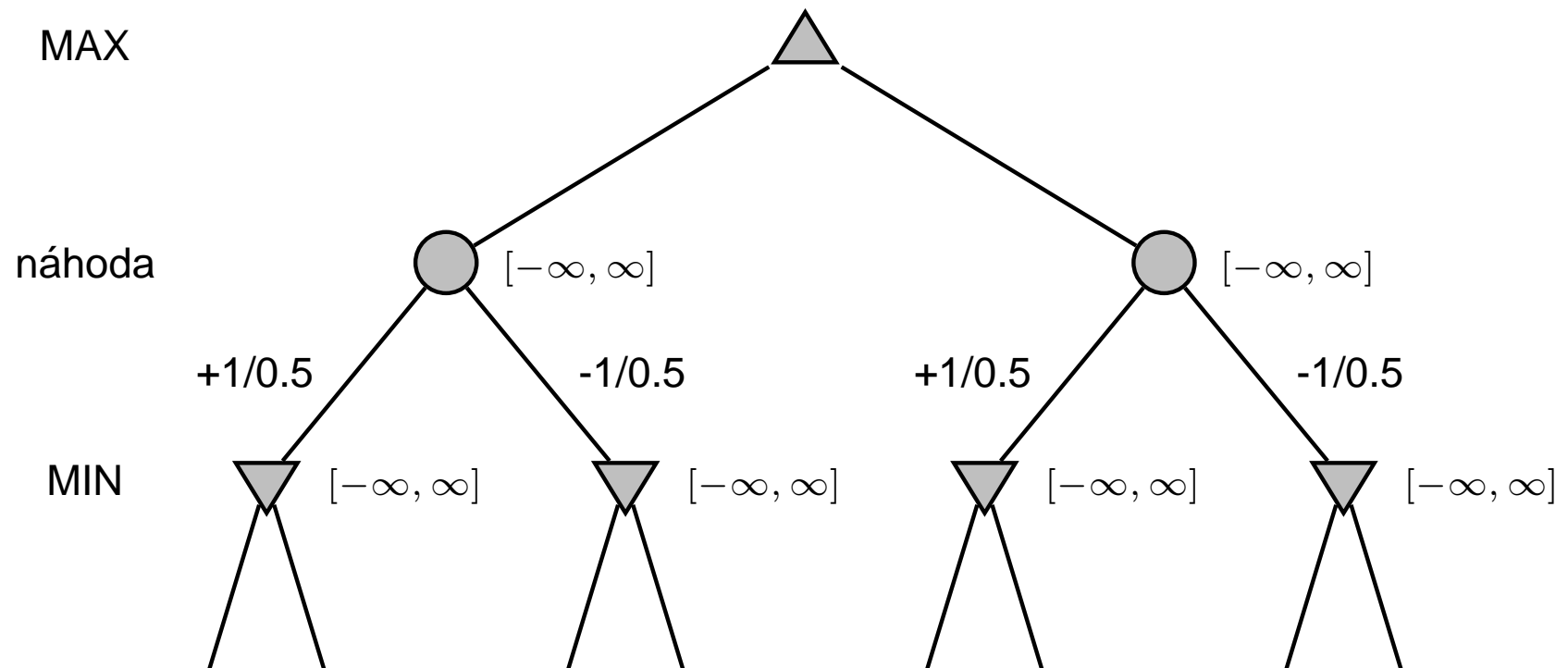
$$\text{expect\_minimax}(n) = \begin{cases} \text{utility}(n) & \text{pro koncový stav } n \\ \max_{s \in \text{moves}(n)} \text{expect\_minimax}(s) & \text{pro MAX uzel } n \\ \min_{s \in \text{moves}(n)} \text{expect\_minimax}(s) & \text{pro MIN uzel } n \\ \sum_{s \in \text{moves}(n)} P(s) \cdot \text{expect\_minimax}(s) & \text{pro uzel náhody } n \end{cases}$$

## PROŘEZÁVÁNÍ V NEDETERMINISTICKÝCH HRÁCH

je možné použít upravené Alfa-Beta prořezávání

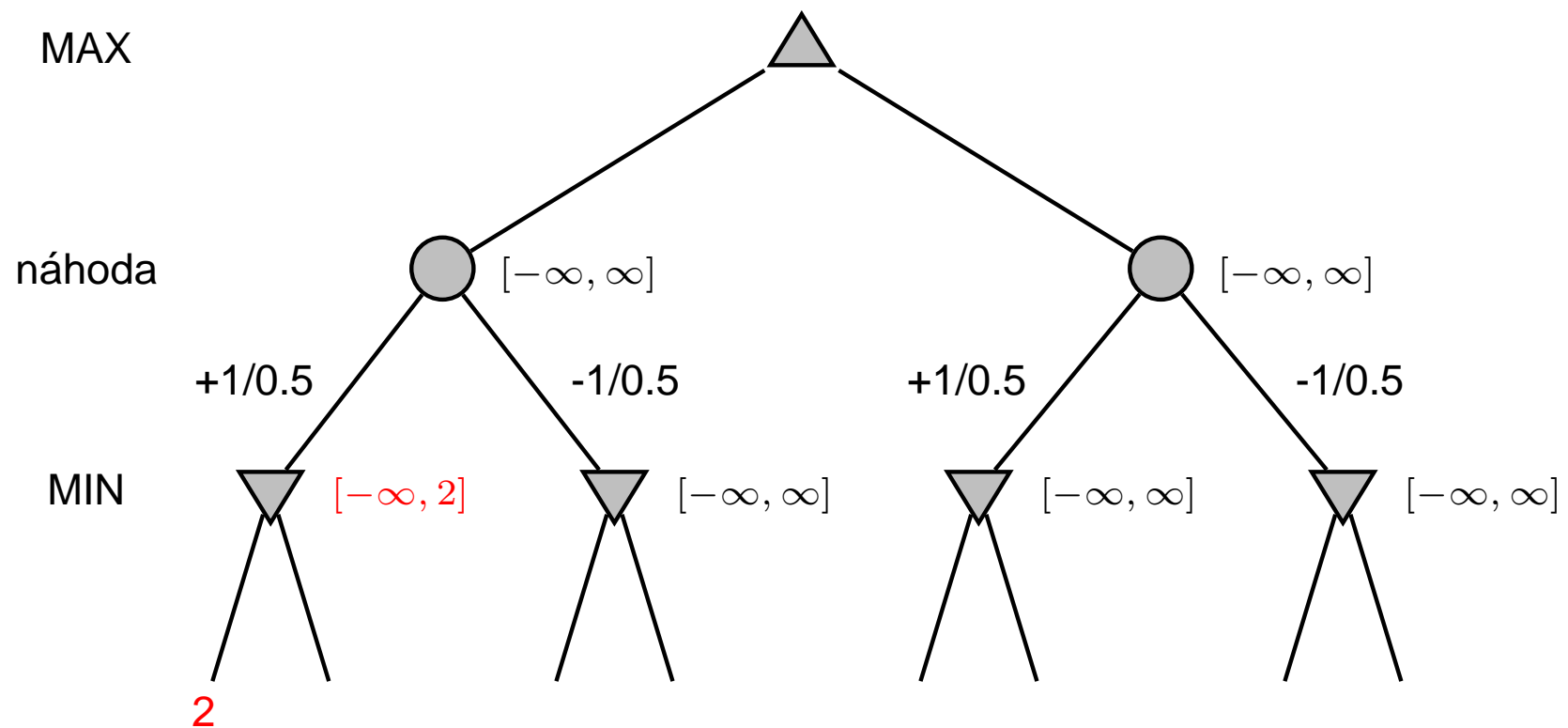
## PROŘEZÁVÁNÍ V NEDETERMINISTICKÝCH HRÁCH

je možné použít upravené Alfa-Beta prořezávání



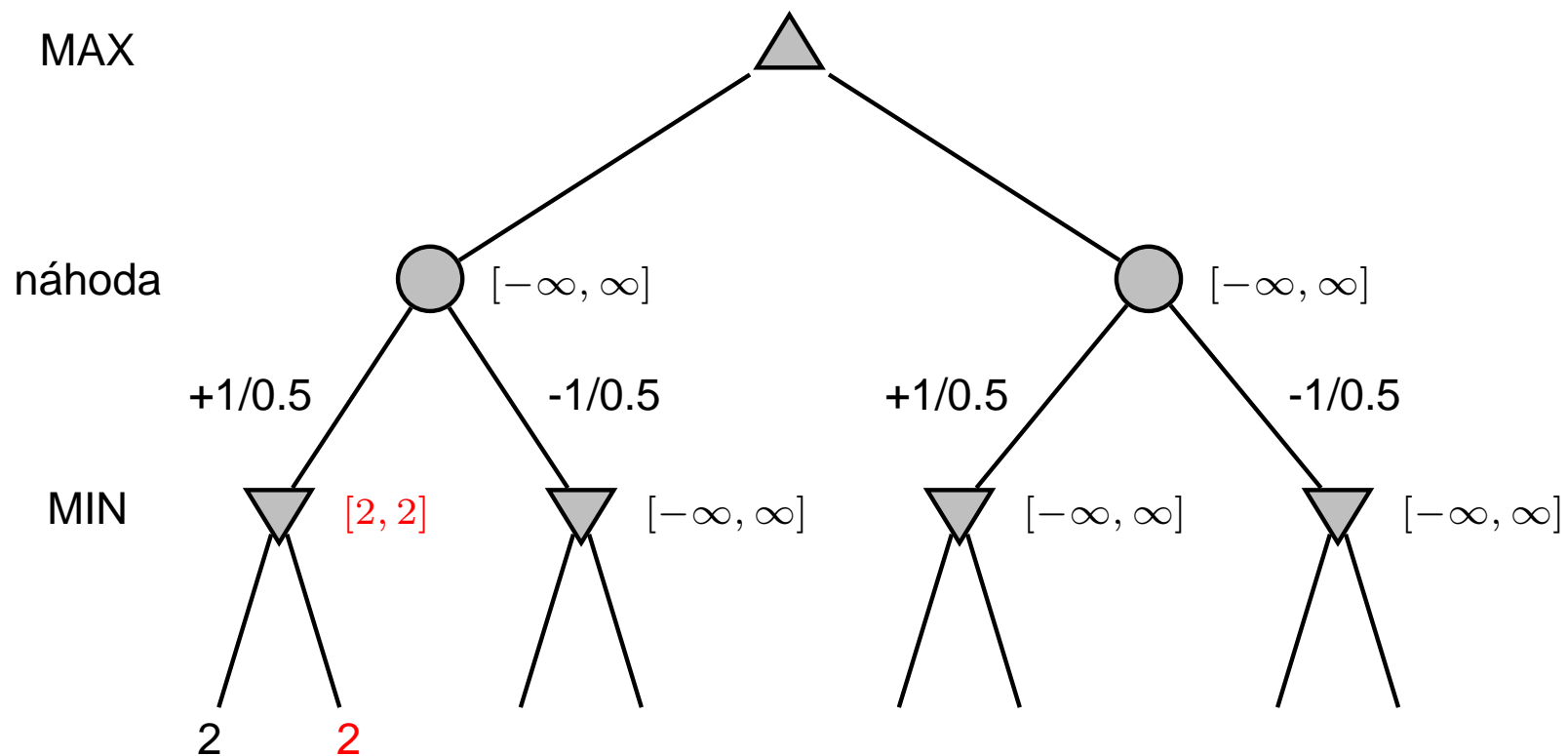
## PROŘEZÁVÁNÍ V NEDETERMINISTICKÝCH HRÁCH

je možné použít upravené Alfa-Beta prořezávání



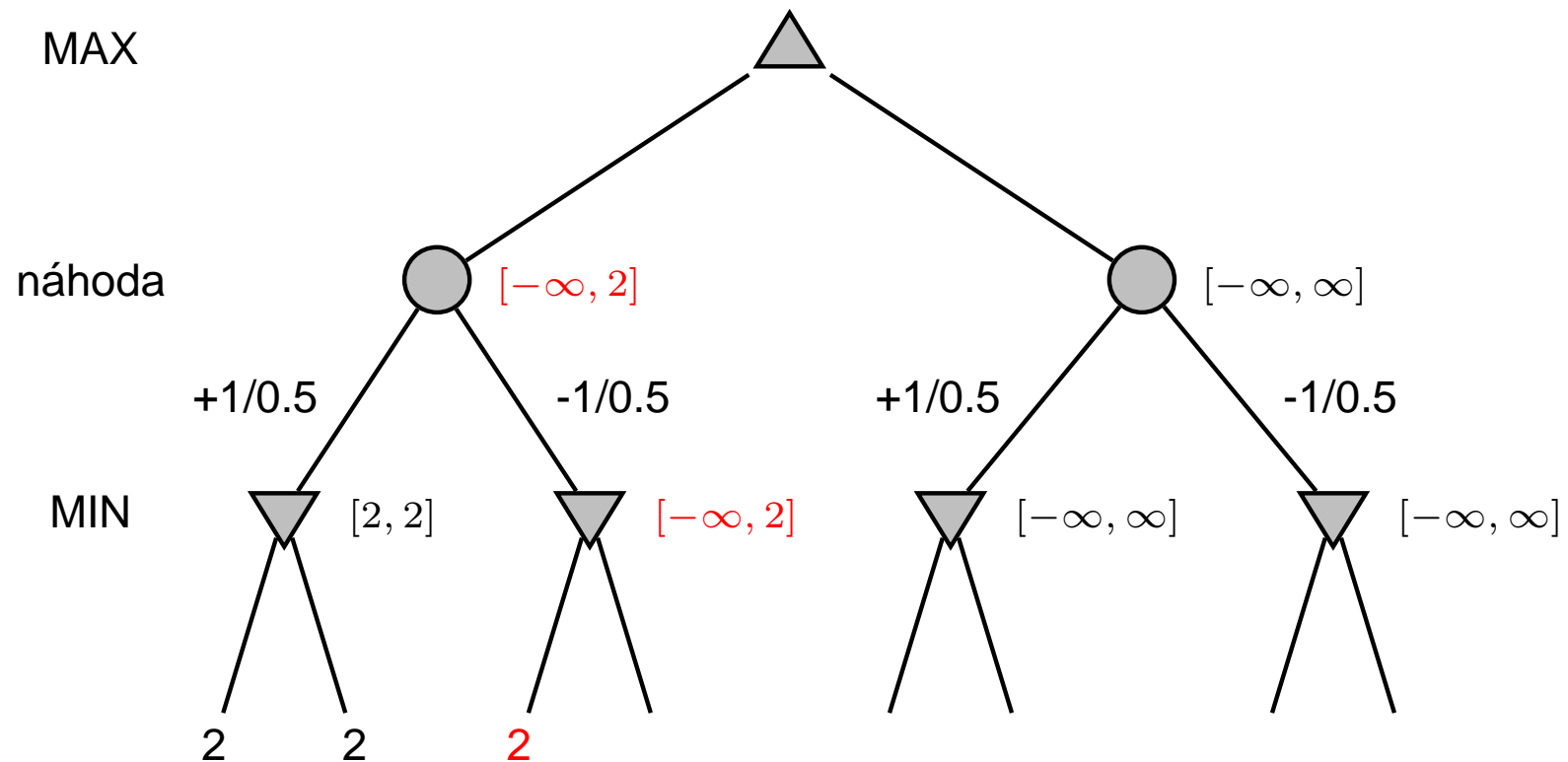
# PROŘEZÁVÁNÍ V NEDETERMINISTICKÝCH HRÁCH

je možné použít upravené Alfa-Beta prořezávání



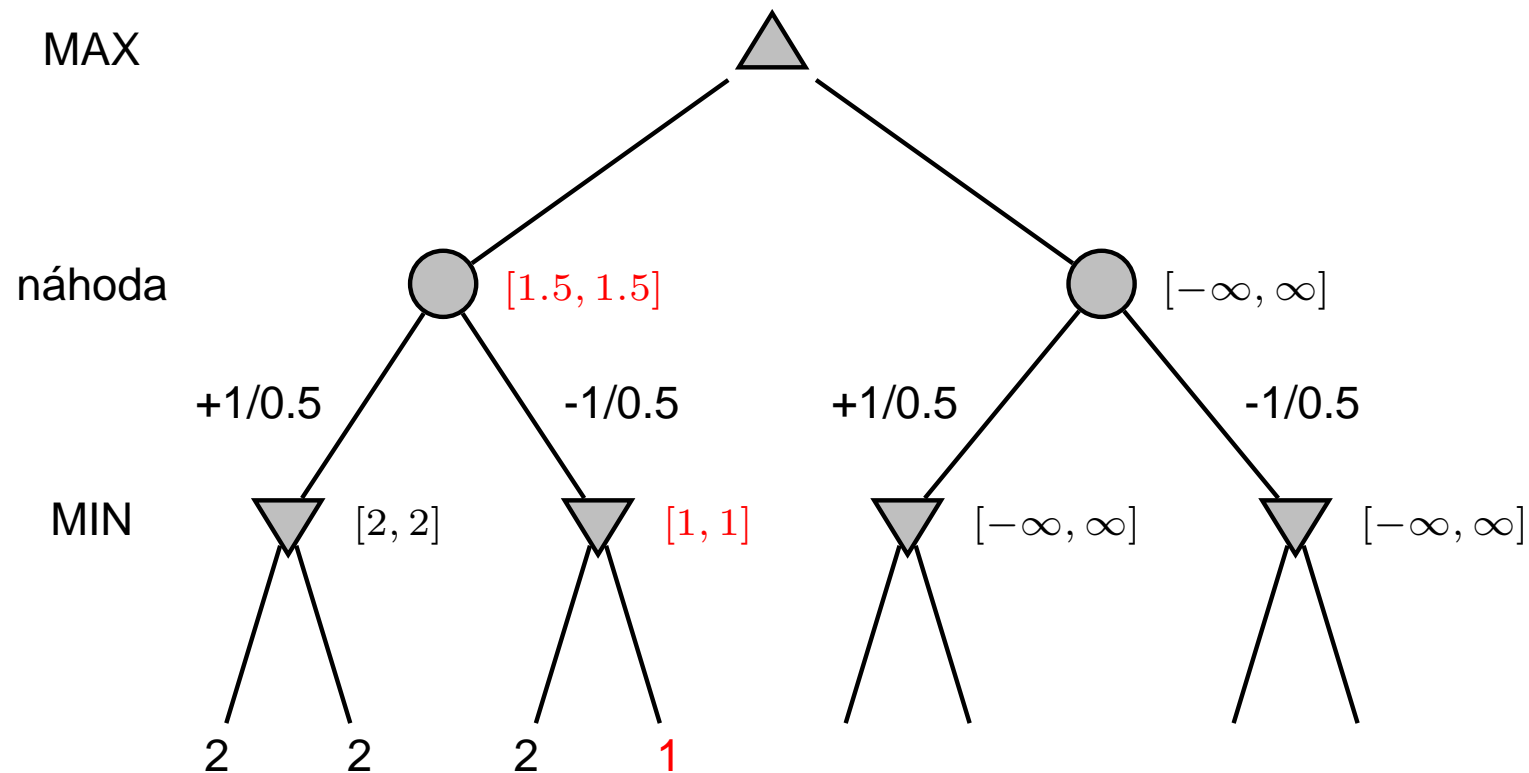
## PROŘEZÁVÁNÍ V NEDETERMINISTICKÝCH HRÁCH

je možné použít upravené Alfa-Beta prořezávání



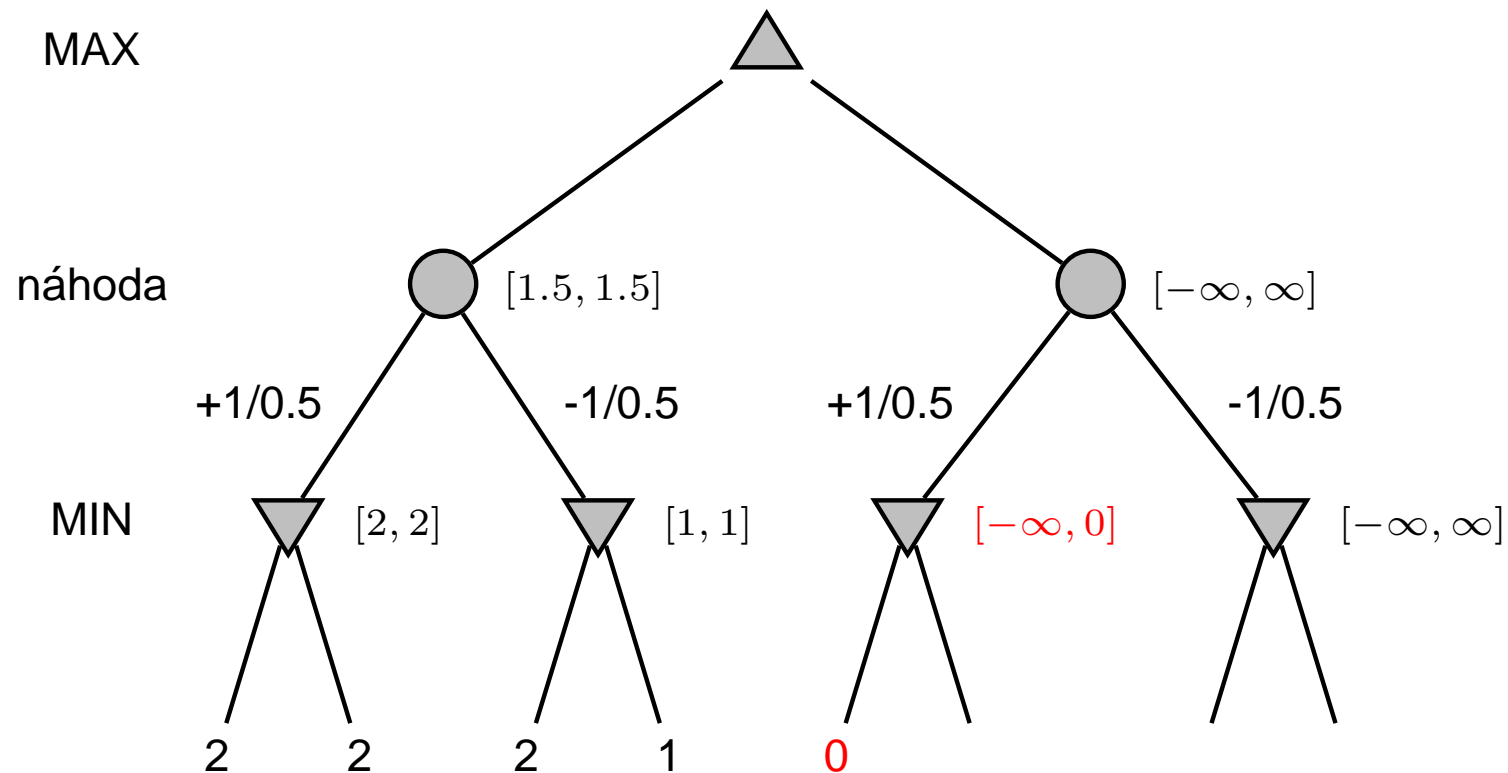
## PROŘEZÁVÁNÍ V NEDETERMINISTICKÝCH HRÁCH

je možné použít upravené Alfa-Beta prořezávání



## PROŘEZÁVÁNÍ V NEDETERMINISTICKÝCH HRÁCH

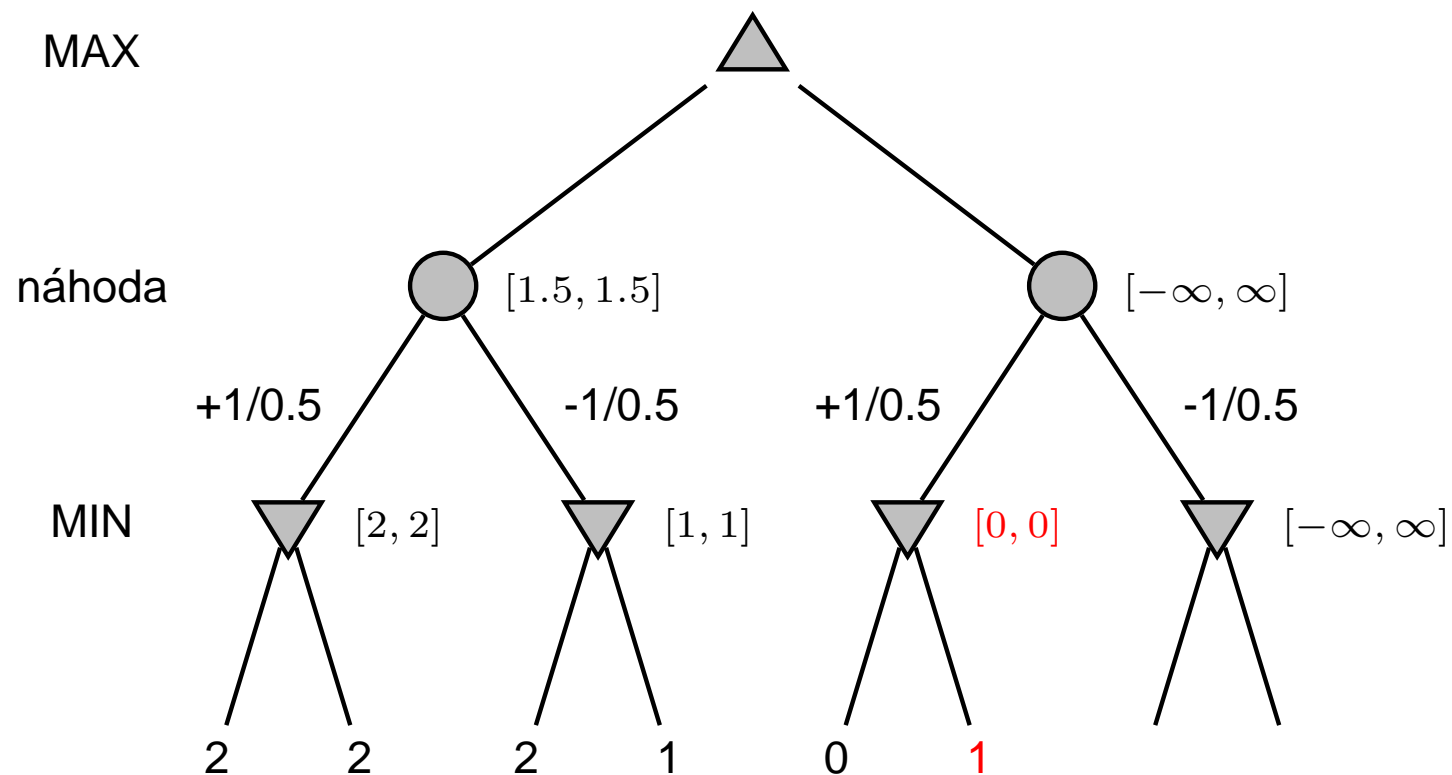
je možné použít upravené Alfa-Beta prořezávání





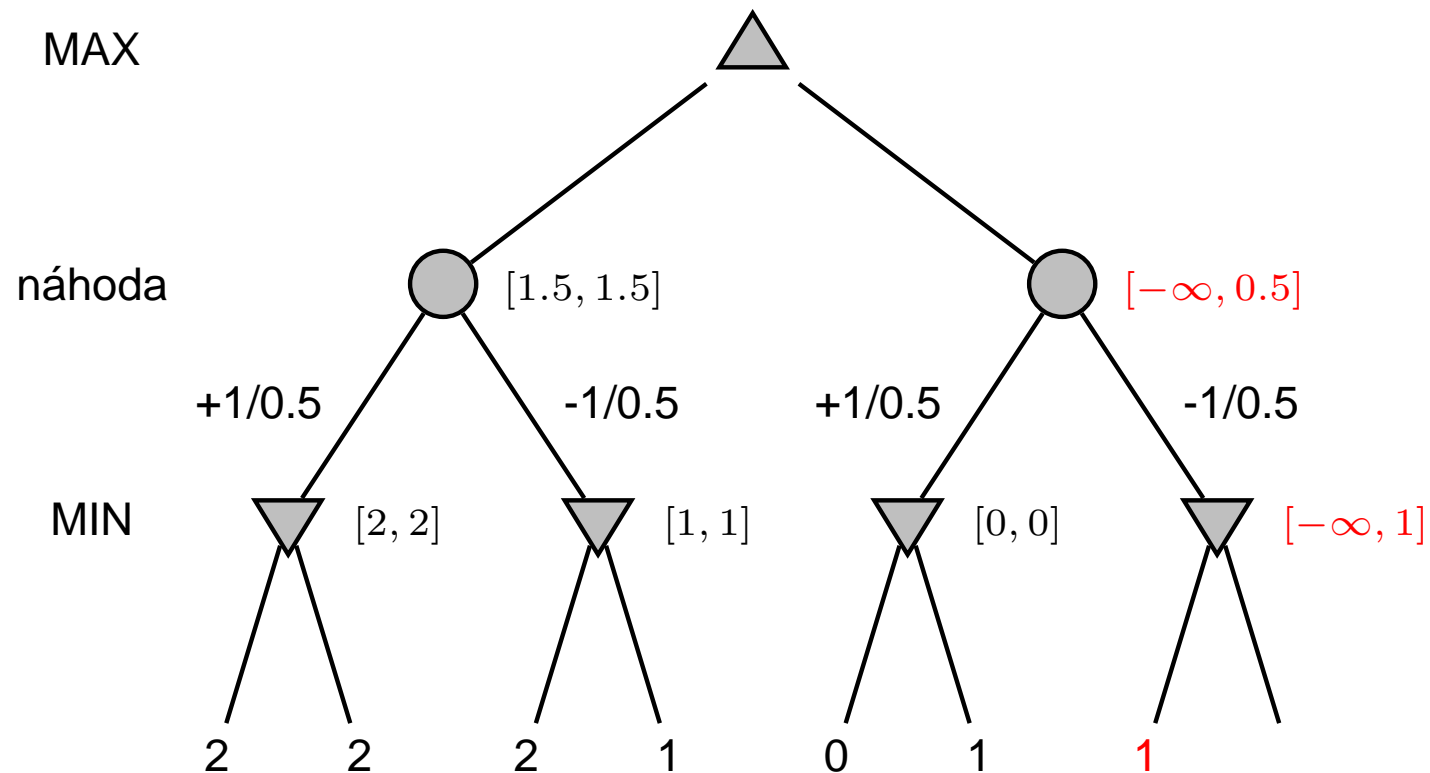
## PROŘEZÁVÁNÍ V NEDETERMINISTICKÝCH HRÁCH

je možné použít upravené Alfa-Beta prořezávání



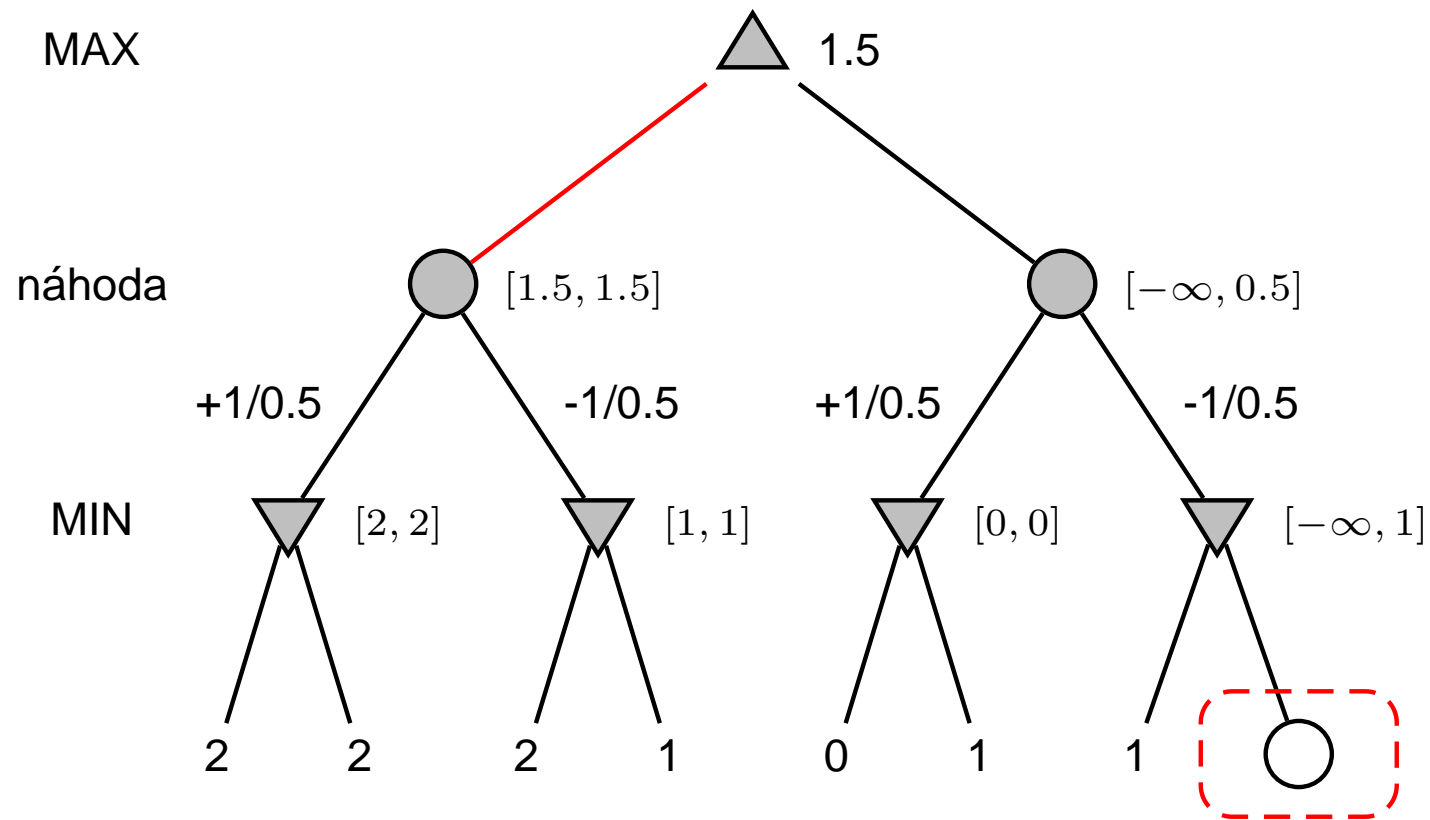
## PROŘEZÁVÁNÍ V NEDETERMINISTICKÝCH HRÁCH

je možné použít upravené Alfa-Beta prořezávání



## PROŘEZÁVÁNÍ V NEDETERMINISTICKÝCH HRÁCH

je možné použít upravené Alfa-Beta prořezávání

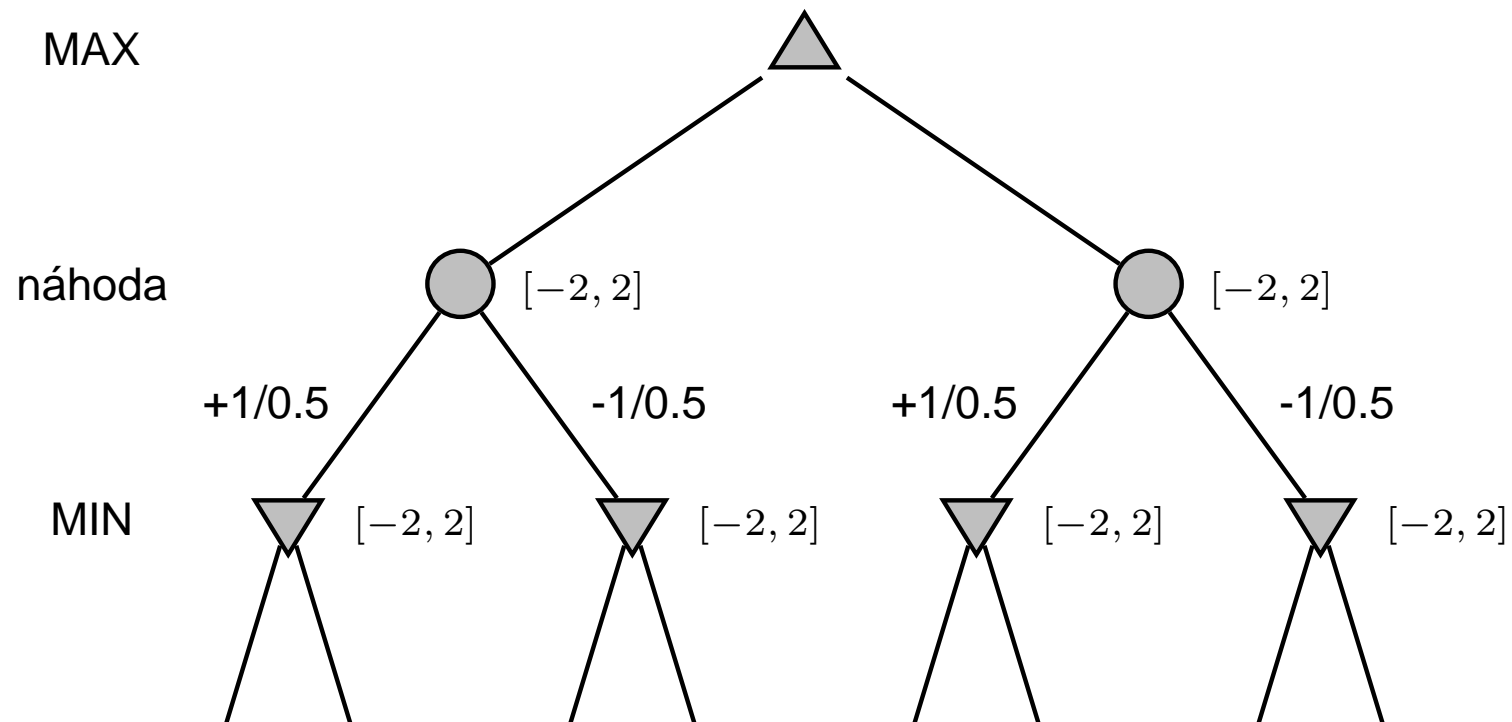


## PROŘEZÁVÁNÍ V NEDETERMINISTICKÝCH HRÁCH pokrač.

pokud je možno dopředu stanovit **limity** na ohodnocení listů → ořezávání je **větší**

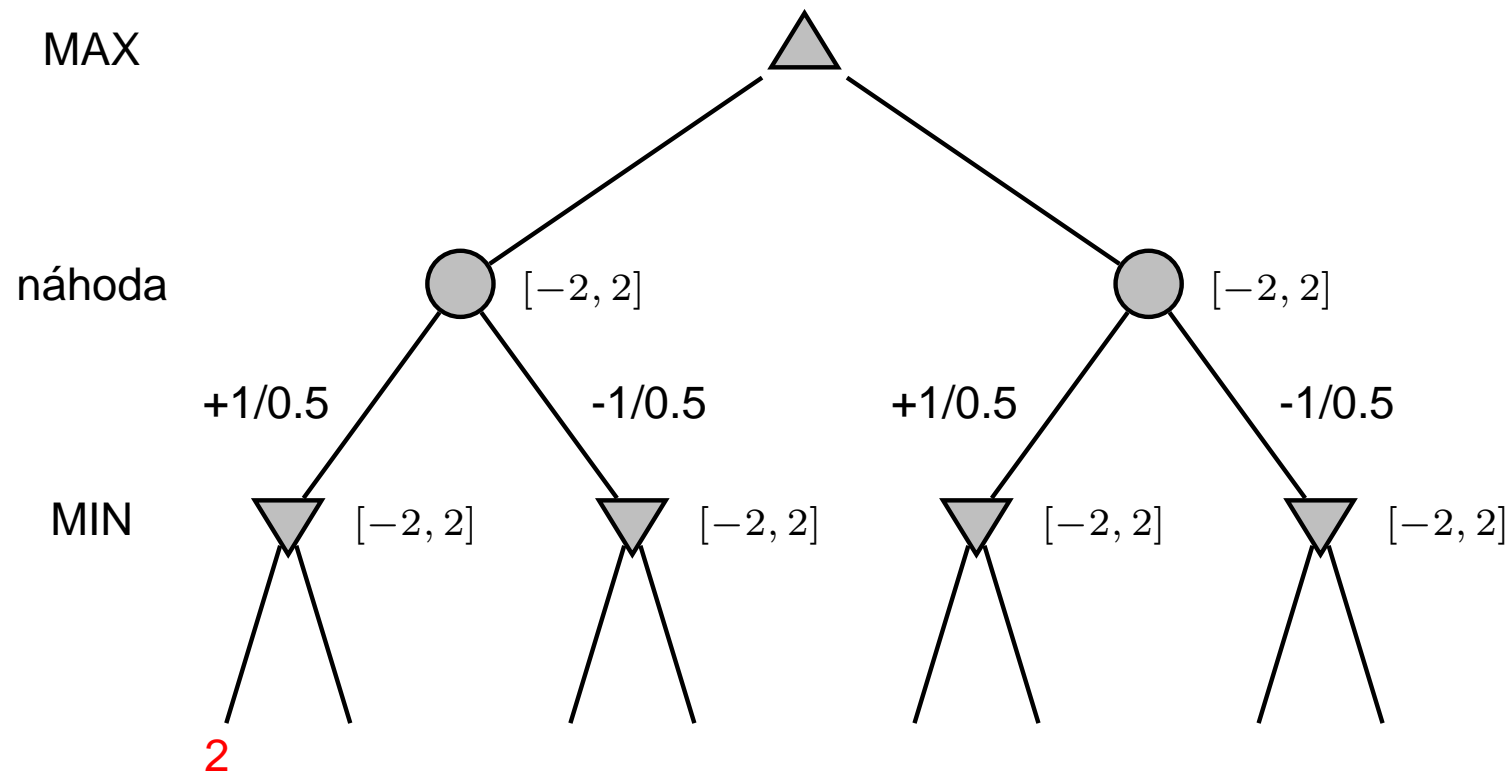
## PROŘEZÁVÁNÍ V NEDETERMINISTICKÝCH HRÁCH pokrač.

pokud je možno dopředu stanovit **limity** na ohodnocení listů → ořezávání je **větší**



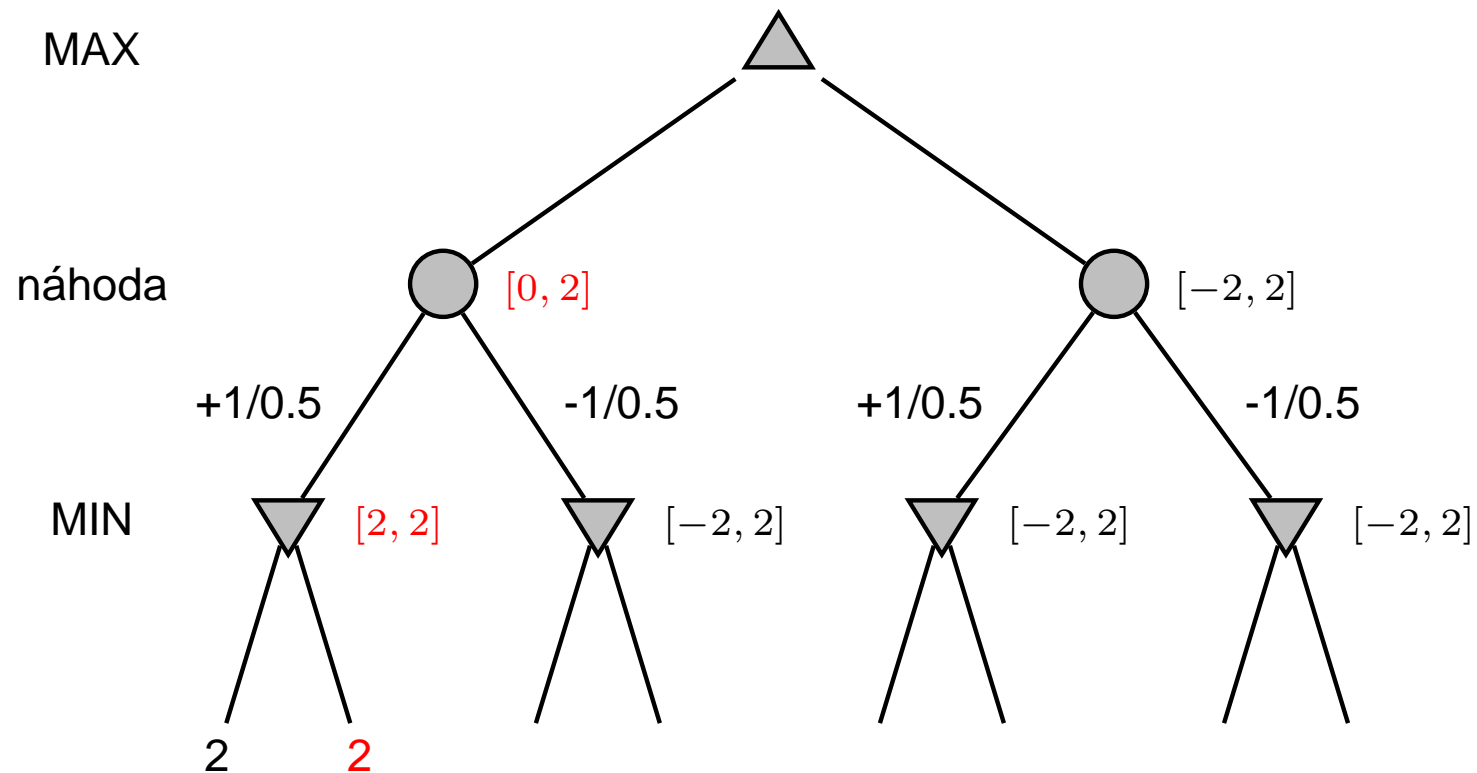
## PROŘEZÁVÁNÍ V NEDETERMINISTICKÝCH HRÁCH pokrač.

pokud je možno dopředu stanovit **limity** na ohodnocení listů → ořezávání je **větší**



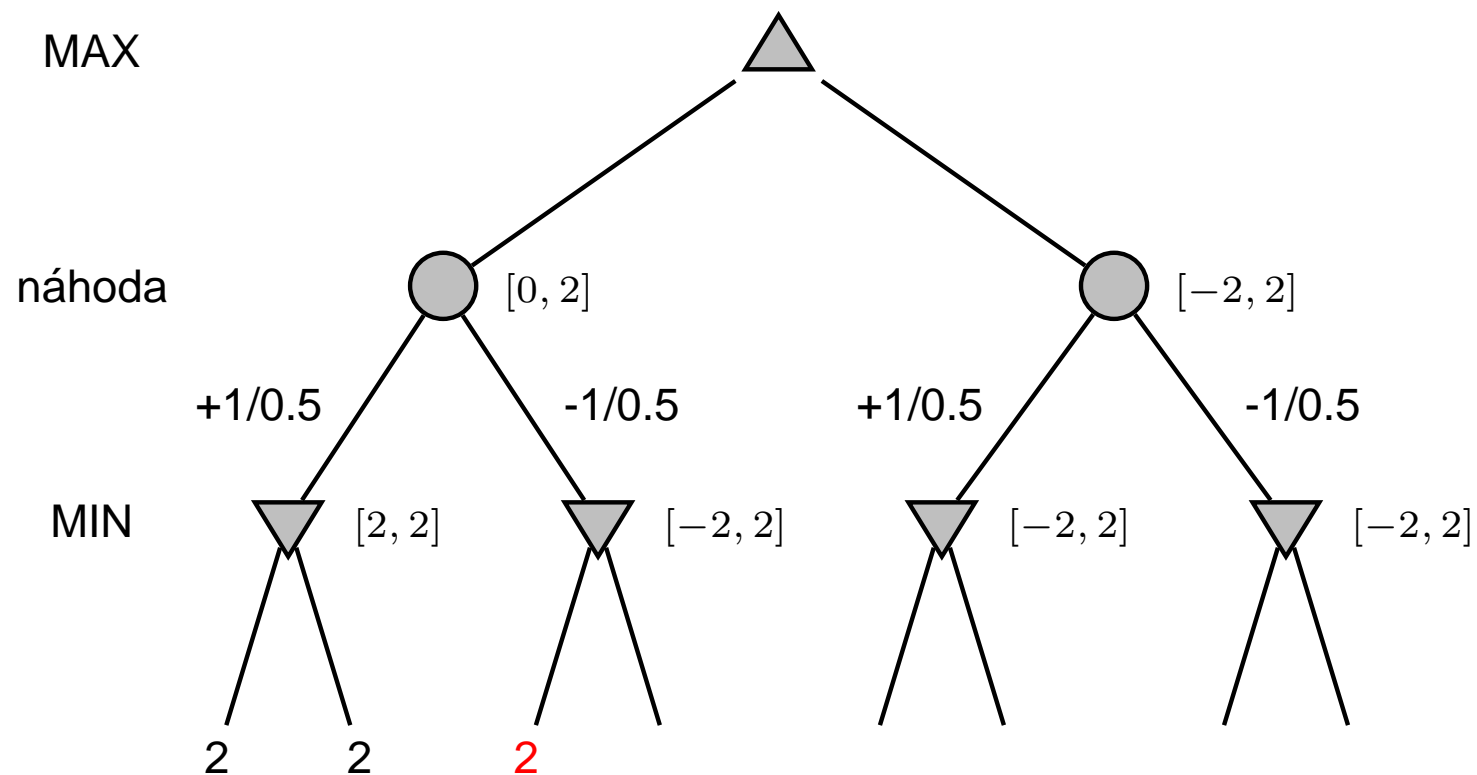
## PROŘEZÁVÁNÍ V NEDETERMINISTICKÝCH HRÁCH pokrač.

pokud je možno dopředu stanovit **limity** na ohodnocení listů → ořezávání je **větší**



## PROŘEZÁVÁNÍ V NEDETERMINISTICKÝCH HRÁCH pokrač.

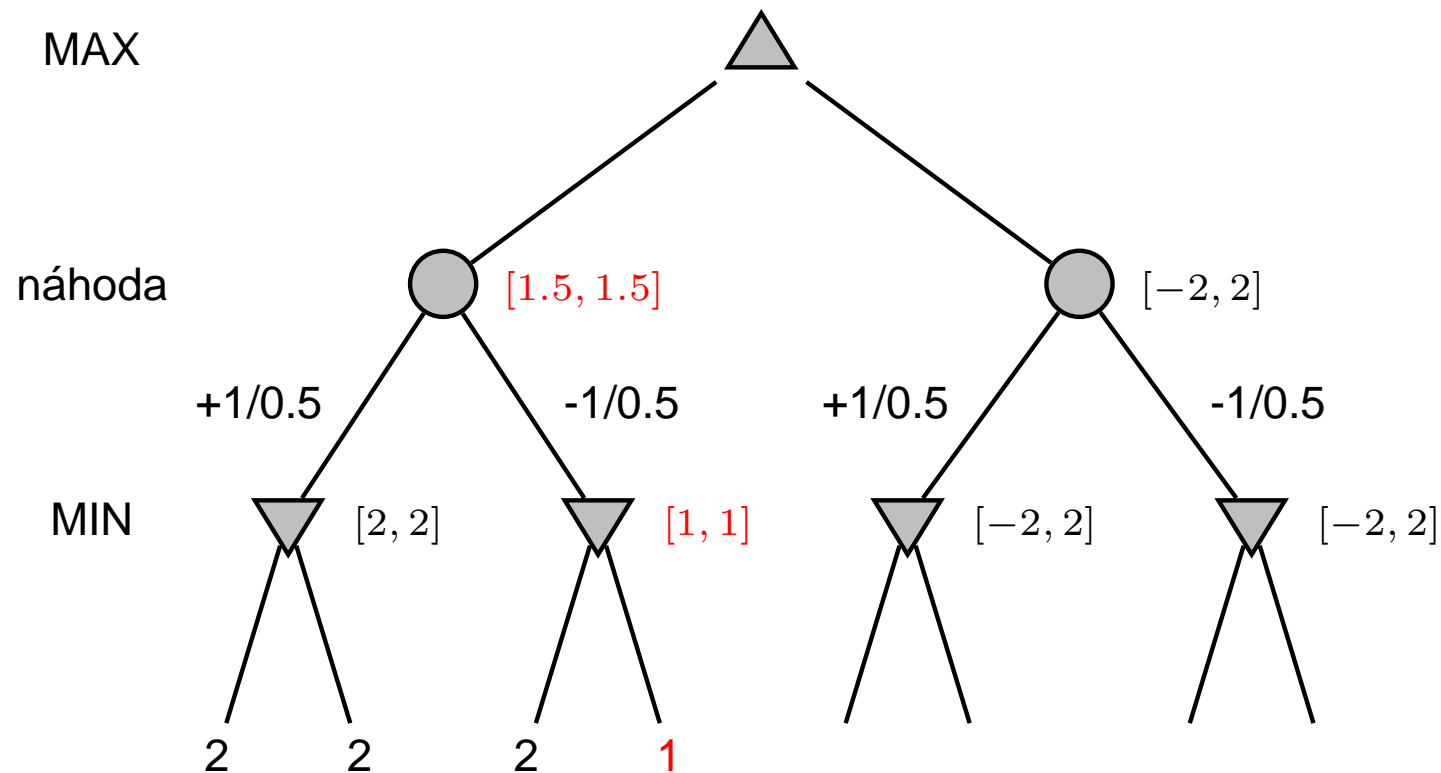
pokud je možno dopředu stanovit **limity** na ohodnocení listů → ořezávání je **větší**





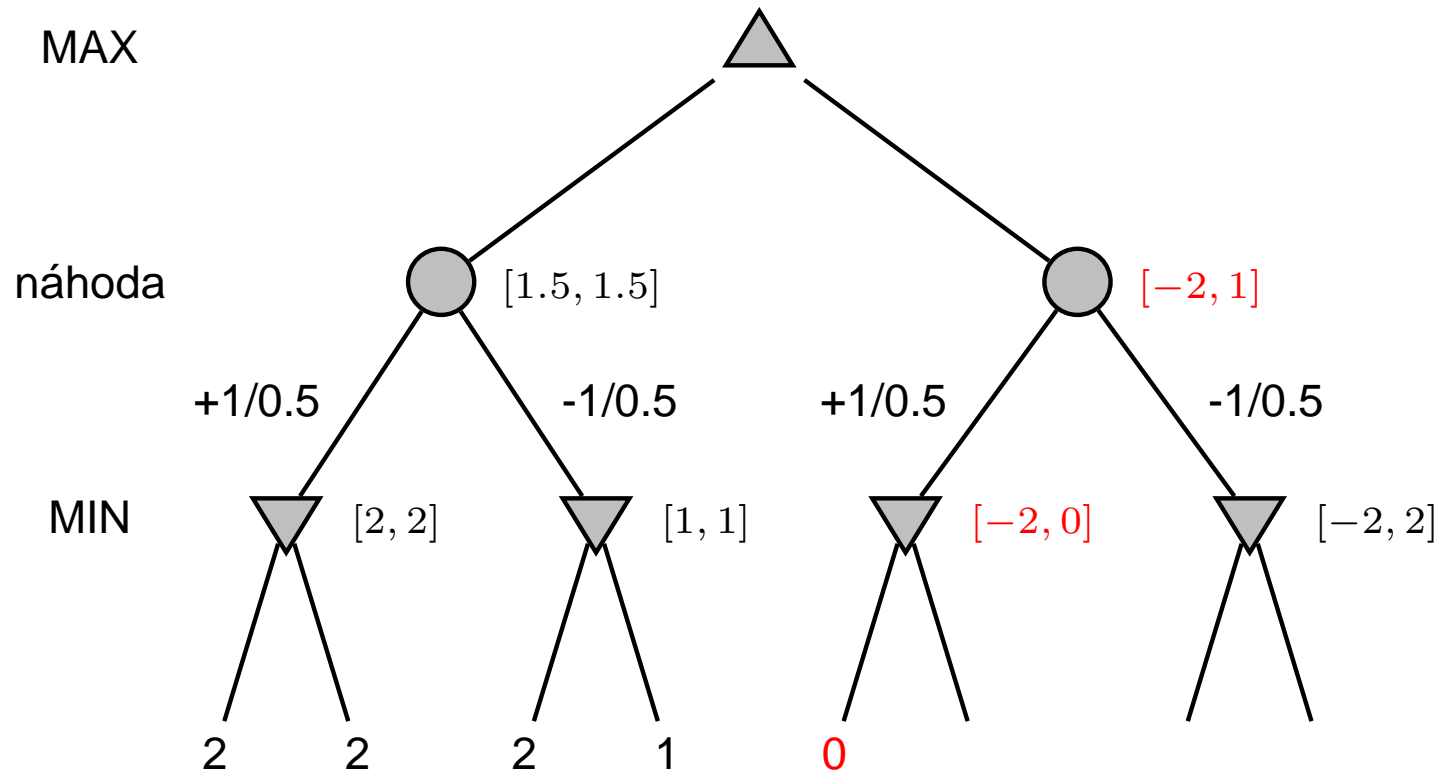
## PROŘEZÁVÁNÍ V NEDETERMINISTICKÝCH HRÁCH pokrač.

pokud je možno dopředu stanovit **limity** na ohodnocení listů → ořezávání je **větší**



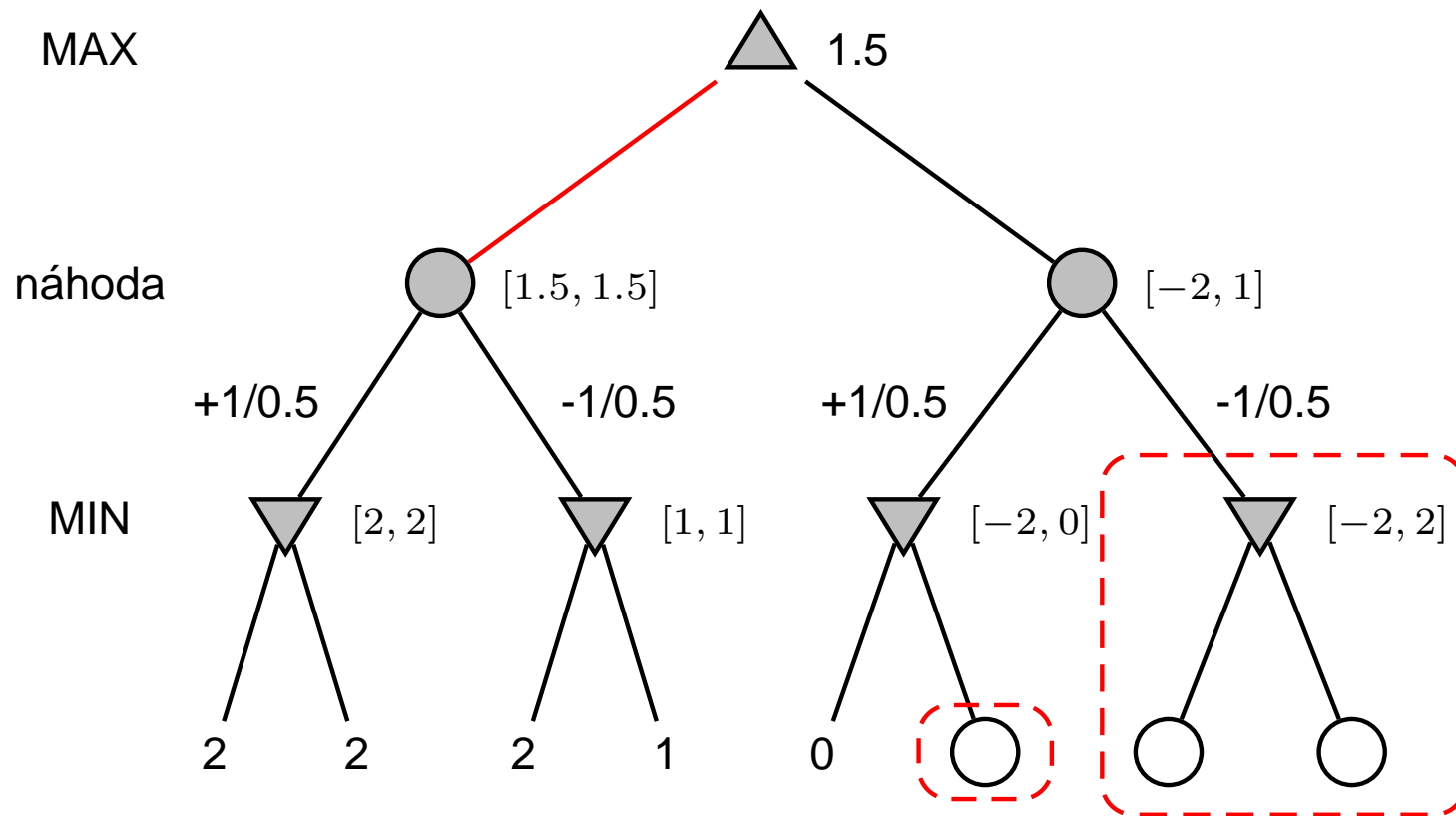
## PROŘEZÁVÁNÍ V NEDETERMINISTICKÝCH HRÁCH pokrač.

pokud je možno dopředu stanovit **limity** na ohodnocení listů → ořezávání je **větší**



## PROŘEZÁVÁNÍ V NEDETERMINISTICKÝCH HRÁCH pokrač.

pokud je možno dopředu stanovit **limity** na ohodnocení listů → ořezávání je **větší**



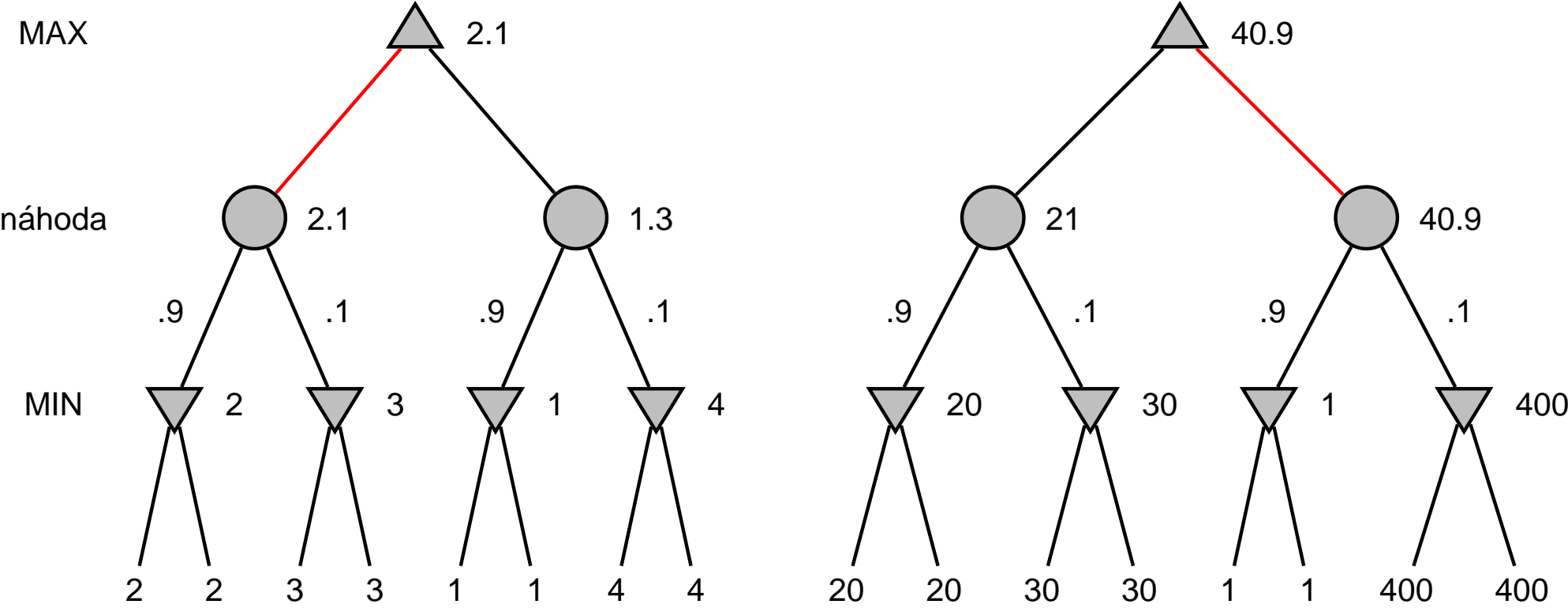
## NEDETERMINISTICKÉ HRY V PRAXI

- hody kostkou zvyšují  $b$  → se dvěma kostkami 21 možných výsledků
- backgammon – 20 legálních tahů:

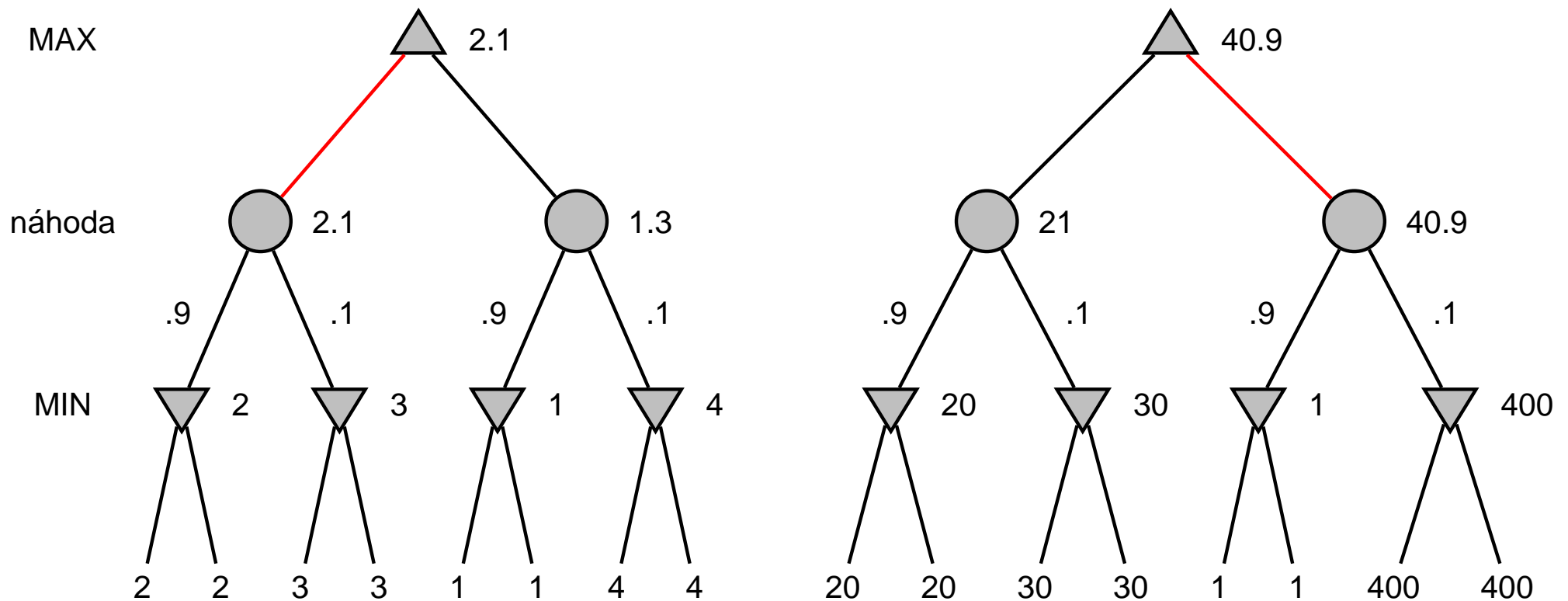
$$\text{hloubka } 4 = 20 \times (21 \times 20)^3 \approx 1.2 \times 10^9$$

- jak se zvyšuje hloubka → pravděpodobnost dosažení zvoleného uzlu klesá  
⇒ význam prohledávání se snižuje
- alfa-beta prořezávání je mnohem méně efektivní
- program *TDGammon* používá prohledávání do hloubky 2 + velice dobrou *Eval* funkci  
≈ dosahuje úrovně světového šampionátu

# ODCHYLKA V OHODNOCENÍ NEDETERMINISTICKÝCH HER



## ODCHYLKA V OHODNOCENÍ NEDETERMINISTICKÝCH HER



chování je zachováno pouze pro **pozitivní lineární** transformaci funkce  $Eval$

$Eval$  u nedeterministických her by tedy měla proporcionálně odpovídat očekávanému výnosu

## HRY S NEPŘESNÝMI ZNALOSTMI

- např. **karetní hry** → **neznáme** počáteční **namíchání karet** oponenta
  - obvykle můžeme spočítat **pravděpodobnost** každého možného rozdání
  - zjednodušeně – jako jeden velký hod kostkou na začátku
  - prohledáváme ovšem ne *reálný stavový prostor*, ale **domnělý stavový prostor**
  - program *Jack*, nejčastější vítěz počítačových šampionátů v bridgi:
    1. generuje 100 rozdání karet konzistentních s daným podáním
    2. vybírá akci, která je v průměru nejlepší
- V roce 2006 porazil Jack na soutěži 3 ze 7 top holandských hráčských párů.