# Prohledávání stavového prostoru

**Aleš Horák**

**E-mail: `hales@fi.muni.cz`**

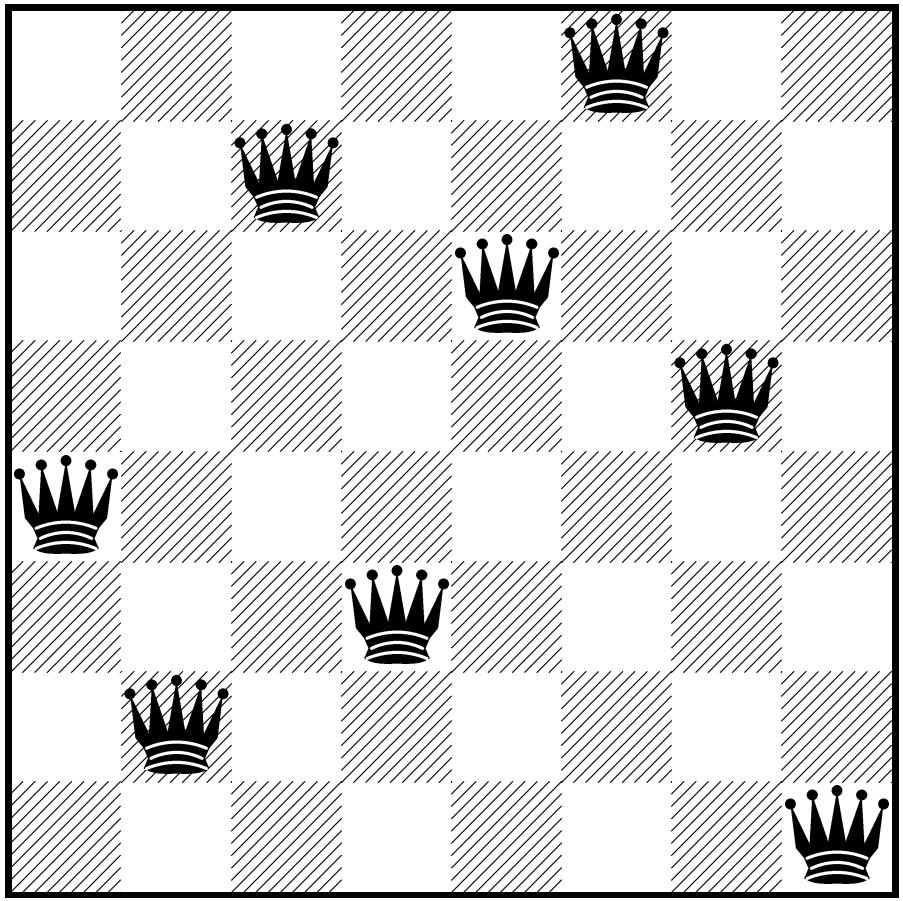
**`http://nlp.fi.muni.cz/uui/`**

Obsah:

- Problém osmi dam
- Prohledávání stavového prostoru
- Prohledávání do hloubky
- Prohledávání do šířky
- Prohledávání s postupným prohlubováním
- Shrnutí vlastností algoritmů neinformovaného prohledávání

# Problém osmi dam

**úkol:** *Rozestavte po šachovnici 8 dam tak, aby se žádné dvě vzájemně neohrožovaly.*



celkem pro *8 dam* existuje *92 různých řešení*

# Problém osmi dam I

datová struktura – osmiprvkový seznam **[X1/Y1, X2/Y2, X3/Y3, X4/Y4, X5/Y5, X6/Y6, X7/Y7, X8/Y8]**

```
Solution = [1/4, 2/2, 3/7, 4/3, 5/6, 6/8, 7/5, 8/1]
```

```
solution(S) :- template(S), sol(S).

sol ([]).
sol([X/Y|Others]) :- sol(Others),
                     member(X,[1,2,3,4,5,6,7,8]),
                     member(Y,[1,2,3,4,5,6,7,8]),
                     noattack(X/Y,Others).

noattack(_,[]).
noattack(X/Y,[X1/Y1|Others]) :- X=\=X1, Y=\=Y1, Y1-Y=\=X1-X, Y1-Y=\=X-X1,
                                noattack(X/Y,Others).

template([X1/Y1, X2/Y2, X3/Y3, X4/Y4, X5/Y5, X6/Y6, X7/Y7, X8/Y8]).

?- solution(Solution).
   Solution = [8/4, 7/2, 6/7, 5/3, 4/6, 3/8, 2/5, 1/1] ;
   Solution = [7/2, 8/4, 6/7, 5/3, 4/6, 3/8, 2/5, 1/1] ;
   Yes
```

# Problém osmi dam II

počet možností u řešení I $= 64 \cdot 63 \cdot 62 \ldots \cdot 57 \approx 1.8 \times 10^{14}$

omezení **stavového prostoru** – každá dáma má svůj sloupec

počet možností u řešení II $= 8 \cdot 7 \cdot 6 \ldots \cdot 1 = 40\,320$

```
solution(S) :- template(S), sol(S).

sol ([]).
sol ([X/Y|Others]) :- sol(Others), member(Y,[1,2,3,4,5,6,7,8]),
                      noattack(X/Y,Others).
noattack(_,[]).
noattack(X/Y,[X1/Y1|Others]) :- Y=\=Y1, Y1-Y=\=X1-X, Y1-Y=\=X-X1,
                                noattack(X/Y,Others).

template([1/Y1,2/Y2,3/Y3,4/Y4,5/Y5,6/Y6,7/Y7,8/Y8]).
```

# Problém osmi dam III

k souřadnicím $x$ a $y$ $\longrightarrow$ přidáme i souřadnice diagonály $u$ a $v$

$$u = x - y \qquad D_x = [1..8] \longrightarrow D_u = [-7..7]$$

$$v = x + y \qquad D_y = [1..8] \qquad D_v = [2..16]$$

po každém umístění dámy aktualizujeme **seznamy volných pozic** počet možností u řešení III $= 2\,057$

```
solution(YList) :- sol(YList ,[1,2,3,4,5,6,7,8],[1,2,3,4,5,6,7,8],
                       [-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7],
                       [2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16]).
sol ([],[], Dy,Du,Dv).
sol([Y|YList],[X|Dx1],Dy,Du,Dv) :- del(Y,Dy,Dy1), U is X-Y, del(U,Du,Du1), V is X+Y,
                                   del(V,Dv,Dv1), sol(YList,Dx1,Dy1,Du1,Dv1).

del(Item,[Item|List], List).
del(Item,[First|List],[First|List1]) :- del(Item,List,List1).
```

Problém $n$ dam pro $n = 100$: řešení I $\ldots 10^{400}$ řešení II $\ldots 10^{158}$ řešení III $\ldots 10^{52}$

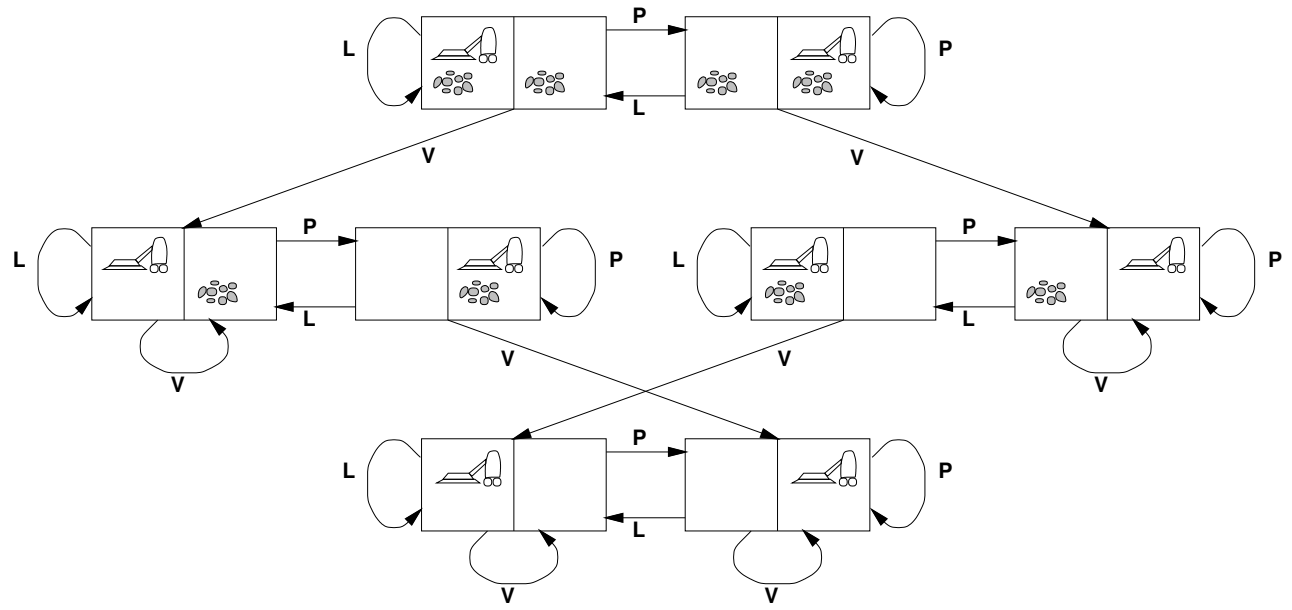
# Prohledávání stavového prostoru

**Řešení problému prohledáváním stavového prostoru:**

- ➜ předpoklady – statické a deterministické prostředí, diskrétní stavy
- ➜ *stavový prostor*
- ➜ *počáteční stav* **init(State)**
- ➜ *cílová podmínka* **goal(State)**
- ➜ *přechodové akce* **move(State,NewState)**
- ➜ *prohledávací strategie*

**Problém agenta Vysavače:**

- ➜ máme dvě místnosti (L, P)
- ➜ jeden vysavač (v L nebo P)
- ➜ v každé místnosti je/není špína
- ➜ počet stavů je $2 \times 2^2 = 8$
- ➜ akce $=\{doLeva, doPrava, Vysávej\}$



## Abstrakce prohledávání stavového prostoru

- *prohledávací strom*
- *kořenový uzel*
- *uzel* prohledávacího stromu:
  - *stav*
  - *rodičovský uzel*
  - *přechodová akce*
  - *hloubka uzlu*
  - *cena* – $g(n)$ cesty, $c(x, a, y)$ přechodu
- *(optimální) řešení*

## Další příklad – posunovačka

počáteční stav (např.)

| | | |
|---|---|---|
| 7 | 2 | 4 |
| 5 | | 6 |
| 8 | 3 | 1 |

$\longrightarrow \quad \dots \quad \longrightarrow$

cílový stav

| | | |
|---|---|---|
| | 1 | 2 |
| 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 |

- ➜ hra na čtvercové šachovnici $m \times m$ s $n = m^2 - 1$ očíslovanými kameny
- ➜ příklad pro šachovnici $3 \times 3$, posunování osmi kamenů (8-posunovačka)
- ➜ stavy – pozice včech kamenů
- ➜ akce – “pohyb” prázdného místa

☞ Optimální řešení obecné $n$-posunovačky je NP-úplné

| | | | |
|---|---|---|---|
| Počet stavů | u 8-posunovačky | … | $9!/2 = 181\,440$ |
| | u 15-posunovačky | … | $10^{13}$ |
| | u 24-posunovačky | … | $10^{25}$ |

## Reálné problémy řešitelné prohledáváním

- hledání cesty z města $A$ do města $B$
- hledání itineráře
- problém obchodního cestujícího
- návrh VLSI čipu
- navigace auta, robota, ...
- postup práce automatické výrobní linky
- návrh proteinů – 3D-sekvence aminokyselin
- Internetové vyhledávání informací

# Řešení problému prohledáváním

Kostra algoritmu:

```
solution(Solution) :- init(State),solve(State,Solution).

solve(State,[State]) :- goal(State).
solve(State,[State|Sol]) :- move(State,NewState),solve(NewState,Sol).
```

**move(State,NewState)** – definuje prohledávací **strategii**

**Porovnání strategií:**

- úplnost
- optimálnost
- časová složitost
- prostorová složitost

složitost závisí na:

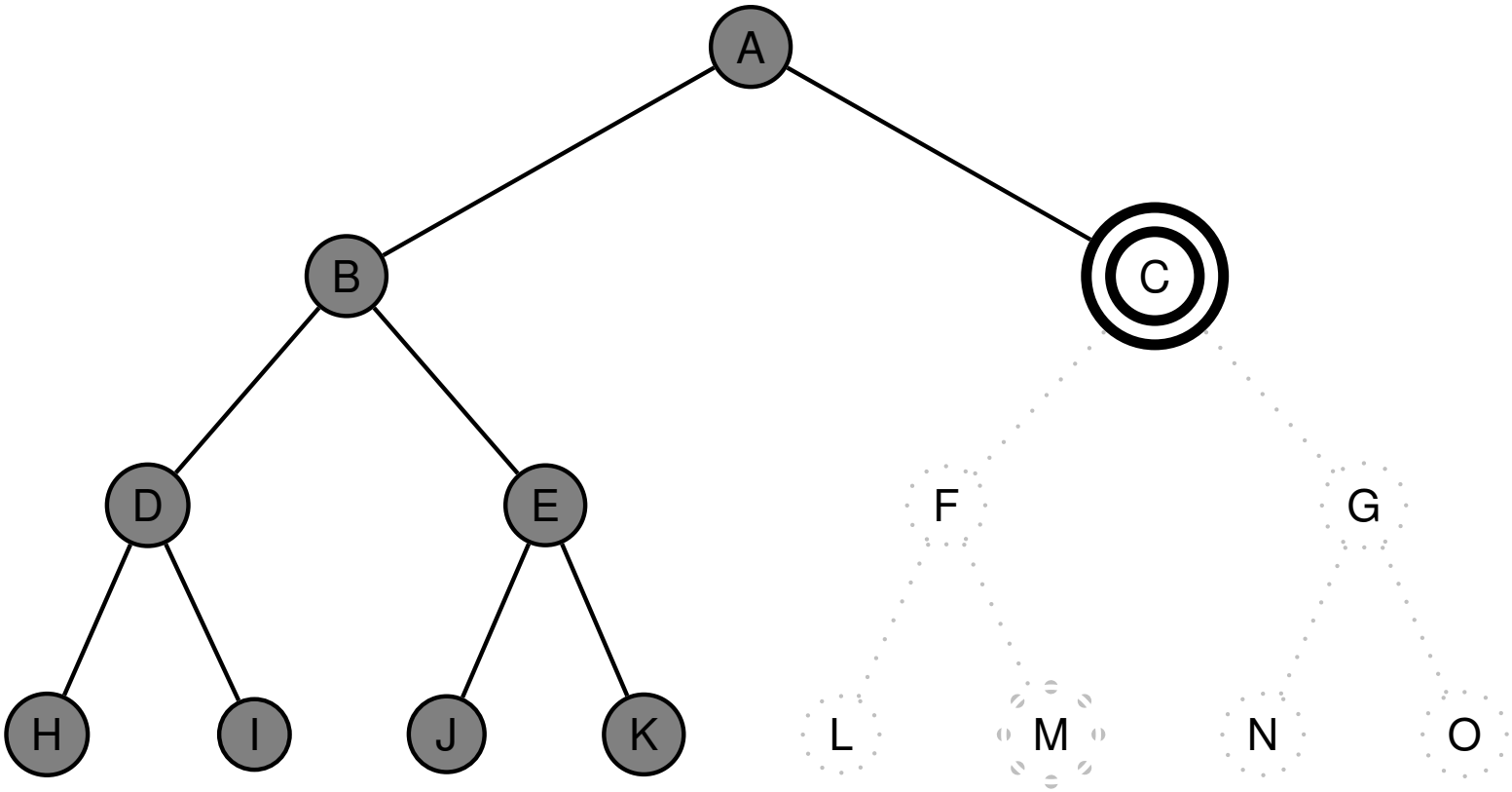
- $b$ – faktor **větvení** (branching factor)
- $d$ – hloubka cíle (goal depth)
- $m$ – maximální hloubka větve/délka cesty (maximum depth/path)

## Neinformované prohledávání

- prohledávání do hloubky
- prohledávání do hloubky s limitem
- prohledávání do šířky
- prohledávání podle ceny
- prohledávání s postupným prohlubováním

# Prohledávání do hloubky

Prohledává se vždy nejlevější a nejhlubší neexpandovaný uzel (*Depth-first Search, DFS*)



# Prohledávání do hloubky

procedurální programovací jazyk – uzly se uloží do **zásobníku** (fronty LIFO) $\times$ Prolog – využití **rekurze**

```
solution(Node,Solution) :- depth_first_search([],Node,Solution).

depth_first_search(Path,Node,[Node|Path]) :- goal(Node).
depth_first_search(Path,Node,Sol) :- move(Node,Node1),
    not(member(Node1,Path)),depth_first_search([Node|Path],Node1,Sol).
```

## Prohledávání do hloubky – vlastnosti

| | |
|---|---|
| *úplnost* | **není** úplný (nekonečná větev, cykly) |
| *optimálnost* | **není** optimální |
| *časová složitost* | $O(b^m)$ |
| *prostorová složitost* | $O(bm)$, lineární |

Největší problém – nekonečná větev = nenajde se cíl, program neskončí!

## Prohledávání do hloubky s limitem

Řešení nekonečné větve – použití "zarážky" = limit hloubky $\ell$

```
solution(Node,Solution) :- depth_first_search_limit(Node,Solution,ℓ).

depth_first_search_limit(Node,[Node],_) :- goal(Node).
depth_first_search_limit(Node,[Node|Sol],MaxDepth) :- MaxDepth>0, move(Node,Node1),
    Max1 is MaxDepth-1,depth_first_search_limit(Node1,Sol,Max1).
```

neúspěch (**fail**) má dvě možné interpretace – **vyčerpání limitu** nebo **neexistenci řešení**

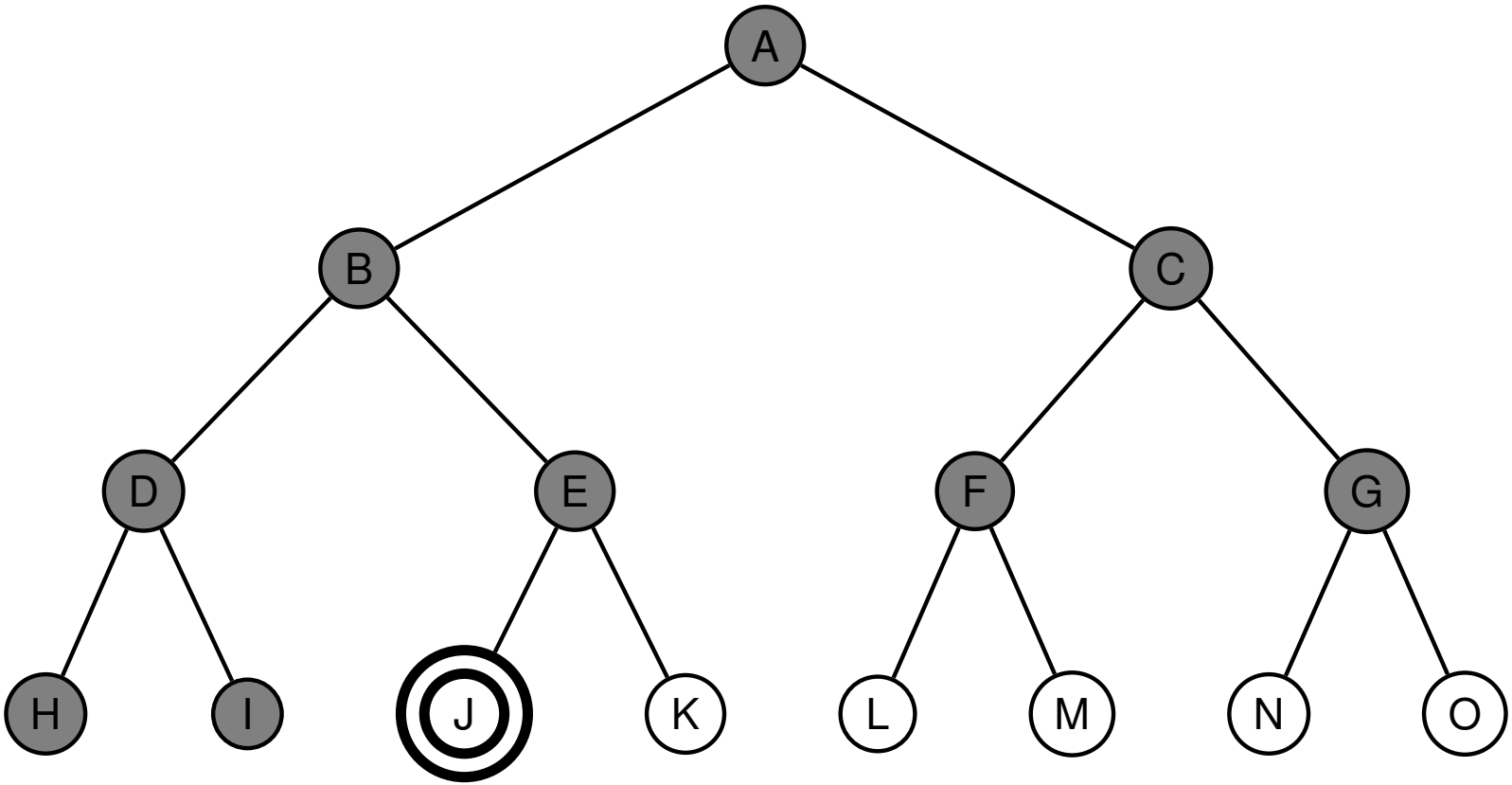
**Vlastnosti:**

| | |
|---|---|
| *úplnost* | **není** úplný (pro $\ell < d$) |
| *optimálnost* | **není** optimální (pro $\ell > d$) |
| *časová složitost* | $O(b^\ell)$ |
| *prostorová složitost* | $O(b\ell)$ |

dobrá volba limitu $\ell$ – podle znalosti problému

# Prohledávání do šířky

Prohledává se vždy nejlevější neexpandovaný uzel s nejmenší hloubkou. (*Breadth-first Search, BFS*)



# Prohledávání do šířky

procedurální programovací jazyk – uzly se uloží do **fronty** (FIFO) $\times$ Prolog – udržuje **seznam cest**

```
solution(Start,Solution) :- breadth_first_search([[Start]], Solution).

breadth_first_search([[Node|Path]|_],[Node|Path]) :- goal(Node).
breadth_first_search([[N|Path]|Paths],Solution) :-
    bagof([M,N|Path], (move(N,M),not(member(M,[N|Path]))), NewPaths),
    NewPaths\=[], append(Paths,NewPaths,Path1), !,
    breadth_first_search(Path1,Solution); breadth_first_search(Paths,Solution).
```

**bagof(+Prom,+Cíl,-Sezn)** *postupně vyhodnocuje* **Cíl** *a všechny vyhovující instance* **Prom** *řadí do seznamu* **Sezn**

**p :- a,b;c.** $\Leftrightarrow$ **p :- (a,b);c.**

**Vylepšení:**

- **append** $\longrightarrow$ **append_dl**
- seznam cest:

| | | |
|---|---|---|
| **[[a]]** | $\longrightarrow$ | **l(a)** |
| **[[b,a],[c,a]]** | | **t(a,[l(b),l(c)])** |
| **[[c,a],[d,b,a],[e,b,a]]** | | **t(a,[t(b,[l(d),l(e)]),l(c)])** |
| **[[d,b,a],[e,b,a],[f,c,a],[g,c,a]]** | | **t(a,[t(b,[l(d),l(e)]),t(c,[l(f),l(g)])])** |

# Prohledávání do šířky – vlastnosti

*úplnost* **je** úplný (pro konečné $b$)

*optimálnost* **je** optimální podle délky cesty/**není** optimální podle obecné ceny

*časová složitost* $1 + b + b^2 + b^3 + \ldots + b^d + b(b^d - 1) = O(b^{d+1})$, exponenciální v $d$

*prostorová složitost* $O(b^{d+1})$ (každý uzel v paměti)

Největší problém – paměť:

| Hloubka | Uzlů | Čas | Paměť |
|---:|---:|---:|---:|
| 2 | 1100 | 0.11 sek | 1 MB |
| 4 | 111 100 | 11 sek | 106 MB |
| 6 | $10^7$ | 19 min | 10 GB |
| 8 | $10^9$ | 31 hod | 1 TB |
| 10 | $10^{11}$ | 129 dnů | 101 TB |
| 12 | $10^{13}$ | 35 let | 10 PB |
| 14 | $10^{15}$ | 3 523 let | 1 EB |

Ani čas není dobrý $\rightarrow$ potřebujeme **informované** strategie prohledávání.

## Prohledávání podle ceny

- BFS je optimální pro rovnoměrně ohodnocené stromy $\times$ prohledávání podle ceny (Uniform-cost Search) je optimální pro **obecné ohodnocení**
- fronta uzlů se udržuje **uspořádaná** podle ceny cesty

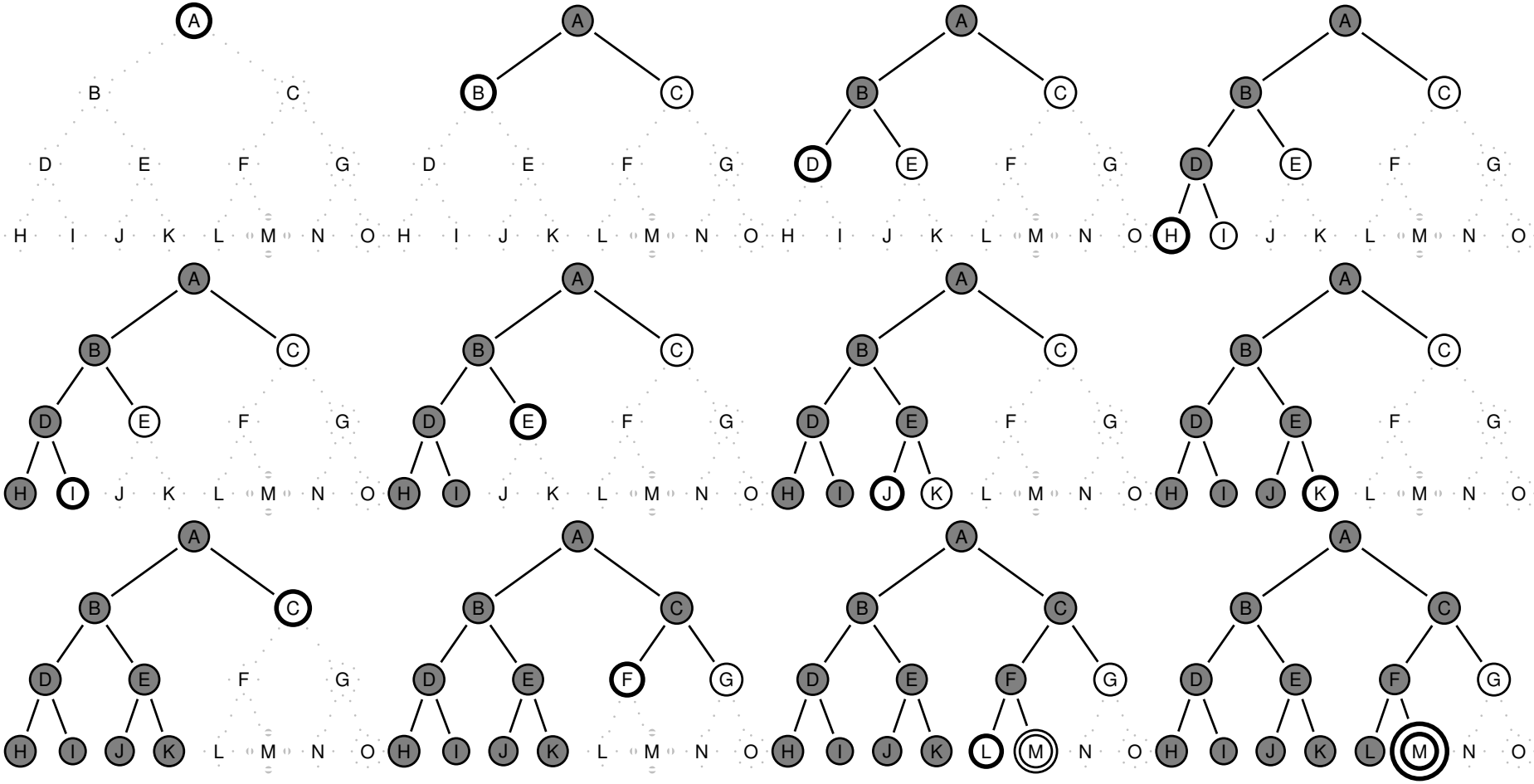
**Vlastnosti:**

| | |
|---|---|
| *úplnost* | **je** úplný (pro cena $\geq \epsilon$) |
| *optimálnost* | **je** optimální (pro cena $\geq \epsilon$, $g(n)$ roste) |
| *časová složitost* | počet uzlů s $g \leq C^*$, $O(b^{1+\lfloor C^*/\epsilon \rfloor})$, kde $C^*$... cena optimálního řešení |
| *prostorová složitost* | počet uzlů s $g \leq C^*$, $O(b^{1+\lfloor C^*/\epsilon \rfloor})$ |

# Prohledávání s postupným prohlubováním

prohledávání do hloubky s postupně se zvyšujícím limitem (Iterative deepening DFS, IDS)

limit=3



## Prohledávání s postupným prohlubováním – vlastnosti

| | |
|---|---|
| *úplnost* | **je** úplný (pro konečné $b$) |
| *optimálnost* | **je** optimální (pro $g(n)$ rovnoměrně neklesající funkce hloubky) |
| *časová složitost* | $d(b) + (d-1)b^2 + \ldots + 1(b^d) = O(b^d)$ |
| *prostorová složitost* | $O(bd)$ |

➜ kombinuje výhody BFS a DFS:

- nízké paměťové nároky – lineární
- optimálnost, úplnost

➜ zdánlivé plýtvání opakovaným generováním
ALE generuje o jednu úroveň míň, např. pro $b = 10, d = 5$:

$$\begin{aligned} N(\mathrm{IDS}) &= 50 + 400 + 3\,000 + 20\,000 + 100\,000 &&= 123\,450 \\ N(\mathrm{BFS}) &= 10 + 100 + 1\,000 + 10\,000 + 100\,000 + 999\,990 &&= 1\,111\,100 \end{aligned}$$

IDS je **nejvhodnější** neinformovaná strategie pro **velké prostory** a **neznámou hloubku** řešení.

# Shrnutí vlastností algoritmů neinformovaného prohledávání

| *Vlastnost* | *do hloubky* | *do hloubky s limitem* | *do šířky* | *podle ceny* | *s postupným prohlubováním* |
|---|---|---|---|---|---|
| *úplnost* | ne | ano, pro $l \geq d$ | ano$^*$ | ano$^*$ | ano$^*$ |
| *optimálnost* | ne | ne | ano$^*$ | ano$^*$ | ano$^*$ |
| *časová složitost* | $O(b^m)$ | $O(b^\ell)$ | $O(b^{d+1})$ | $O(b^{1+\lfloor C^*/\epsilon \rfloor})$ | $O(b^d)$ |
| *prostorová složitost* | $O(bm)$ | $O(b\ell)$ | $O(b^{d+1})$ | $O(b^{1+\lfloor C^*/\epsilon \rfloor})$ | $O(bd)$ |