

Učení, rozhodovací stromy, neuronové sítě

Aleš Horák

E-mail: `hales@fi.muni.cz`

`http://nlp.fi.muni.cz/uui/`

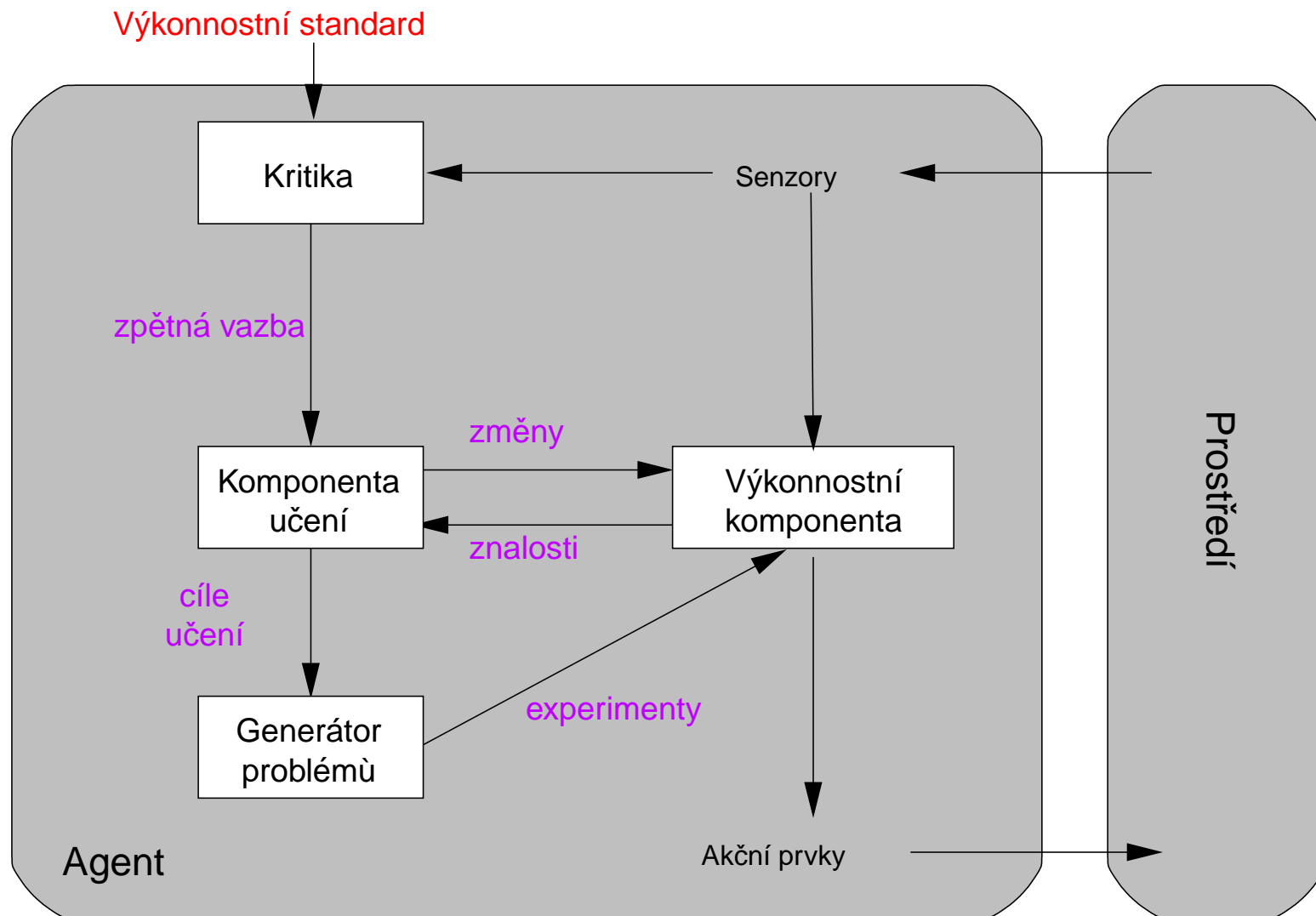
Obsah:

- Učení
- Rozhodovací stromy
- Neuronové sítě

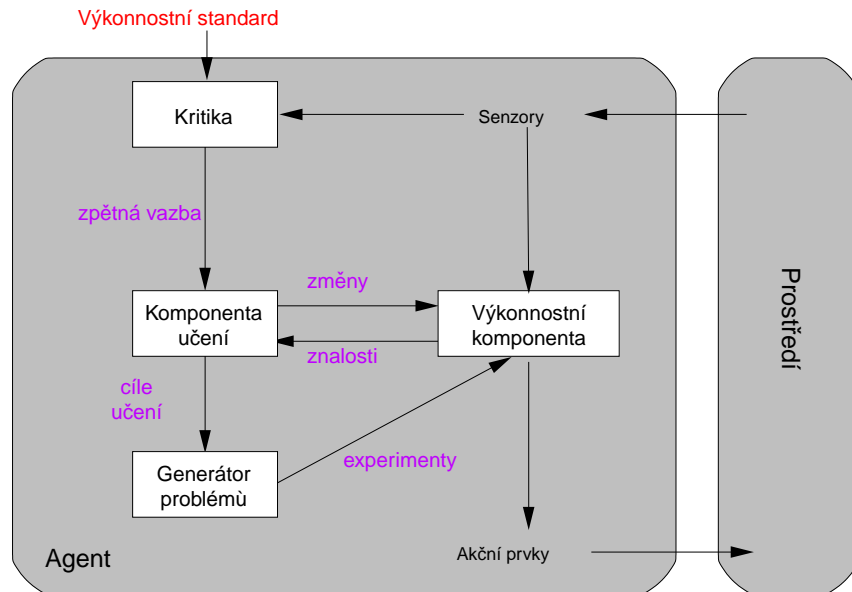
UČENÍ

- **učení** je klíčové pro neznámé prostředí (kde návrhář není vševědoucí)
- učení je také někdy vhodné jako **metoda konstrukce** systému – vystavit agenta realitě místo přepisování reality do pevných pravidel
- učení agenta – využití jeho **vjemů** z prostředí nejen pro vyvození další akce
- učení **modifikuje rozhodovací systém** agenta pro zlepšení jeho výkonnosti

UČÍCÍ SE AGENT



UČÍCÍ SE AGENT



příklad automatického taxi:

- ❑ **Výkonnostní komponenta** – obsahuje znalosti a postupy pro výběr akcí pro vlastní řízení auta
- ❑ **Kritika** – sleduje reakce okolí na akce taxi. Např. při rychlém přejetí 3 podélných pruhů zaznamená a předá pohoršující reakce dalších řidičů
- ❑ **Komponenta učení** – z hlášení Kritiky vyvodí nové pravidlo, že takové přejíždění je nevhodné, a modifikuje odpovídajícím způsobem Výkonnostní komponentu
- ❑ **Generátor problémů** – zjišťuje, které oblasti by mohly potřebovat vylepšení a navrhuje experimenty, jako je třeba brždění na různých typech vozovky

KOMPONENTA UČENÍ

návrh komponenty učení závisí na několika attributech:

- jaký typ výkonnostní komponenty je použit
- která funkční část výkonnostní komponenty má být učena
- jak je tato funkční část reprezentována
- jaká zpětná vazba je k dispozici

příklady:

výkonnostní komponenta	funkční část	reprezentace	zpětná vazba
Alfa-beta prohledávání	vyhodnocovací funkce	vážená lineární funkce	výhra/prohra
Logický agent	určení akce	axiomy <i>Result</i>	výsledné skóre
Reflexní agent	váhy preceptronu	neuronová síť	správná/špatná akce

KOMPONENTA UČENÍ

návrh komponenty učení závisí na několika attributech:

- jaký typ výkonnostní komponenty je použit
- která funkční část výkonnostní komponenty má být učena
- jak je tato funkční část reprezentována
- jaká zpětná vazba je k dispozici

příklady:

výkonnostní komponenta	funkční část	reprezentace	zpětná vazba
Alfa-beta prohledávání	vyhodnocovací funkce	vážená lineární funkce	výhra/prohra
Logický agent	určení akce	axiomy <i>Result</i>	výsledné skóre
Reflexní agent	váhy preceptronu	neuronová síť	správná/špatná akce

učení **s dohledem** (*supervised learning*) × **bez dohledu** (*unsupervised learning*)

- s dohledem** – učení **funkce** z příkladů vstupů a výstupů
- bez dohledu** – učení **vzorů** na vstupu vzhledem k reakcím prostředí
- posílené** (*reinforcement learning*) – nejobecnější, agent se učí podle **odměn/pokut**

INDUKTIVNÍ UČENÍ

známé taky jako **věda** 😊

nejjednodušší forma – učení funkce z příkladů (agent je **tabula rasa**)

f je cílová funkce

příklad je dvojice $x, f(x)$ např.

o	o	×
	×	
×		

, +1

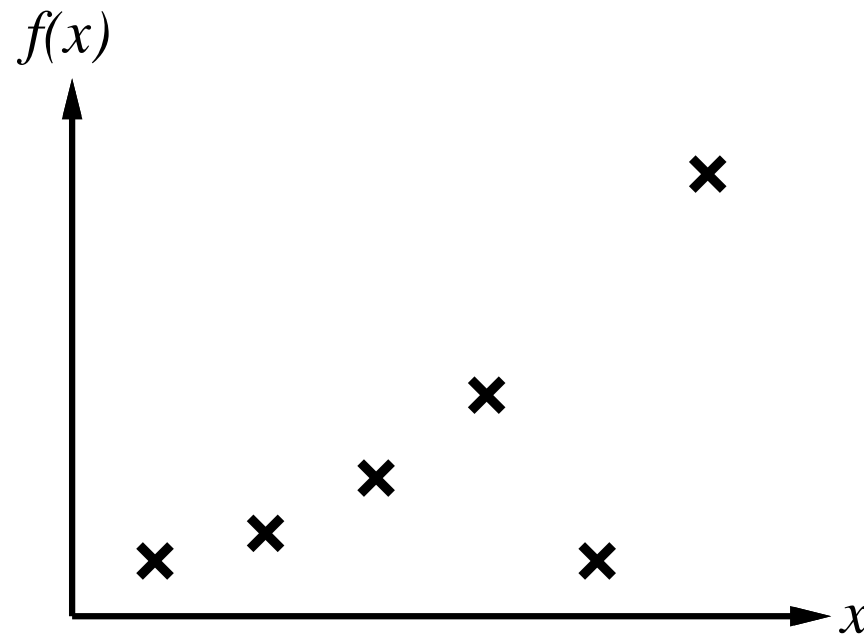
úkol **indukce**: najdi **hypotézu** h
takovou, že $h \approx f$
pomocí sady **trénovacích příkladů**

METODA INDUKTIVNÍHO UČENÍ

zkonstruuuj/uprav h , aby souhlasila s f na trénovacích příkladech

h je konzistentní \Leftrightarrow souhlasí f na všech příkladech

např. hledání křivky:

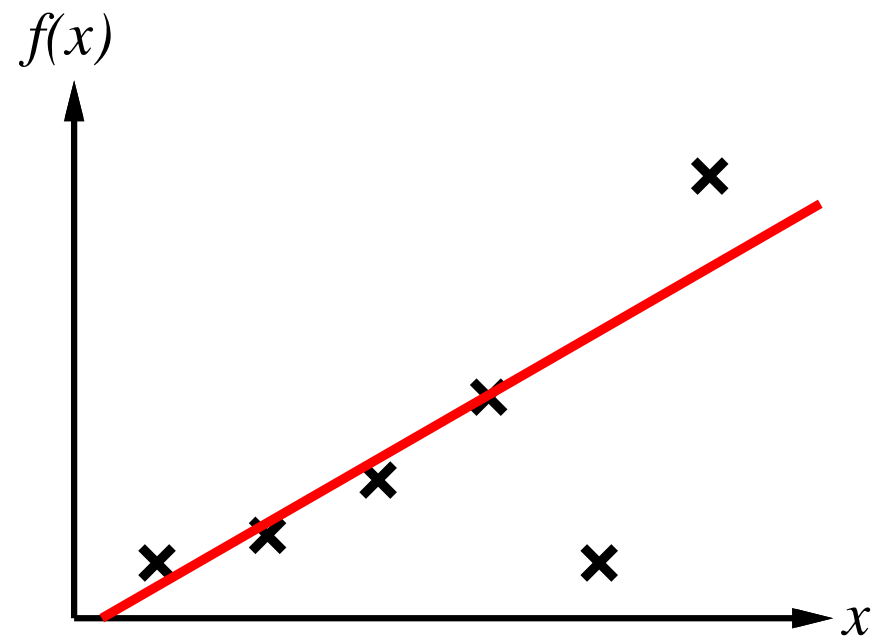


METODA INDUKTIVNÍHO UČENÍ

zkonstruuj/uprav h , aby souhlasila s f na trénovacích příkladech

h je konzistentní \Leftrightarrow souhlasí f na všech příkladech

např. hledání křivky:

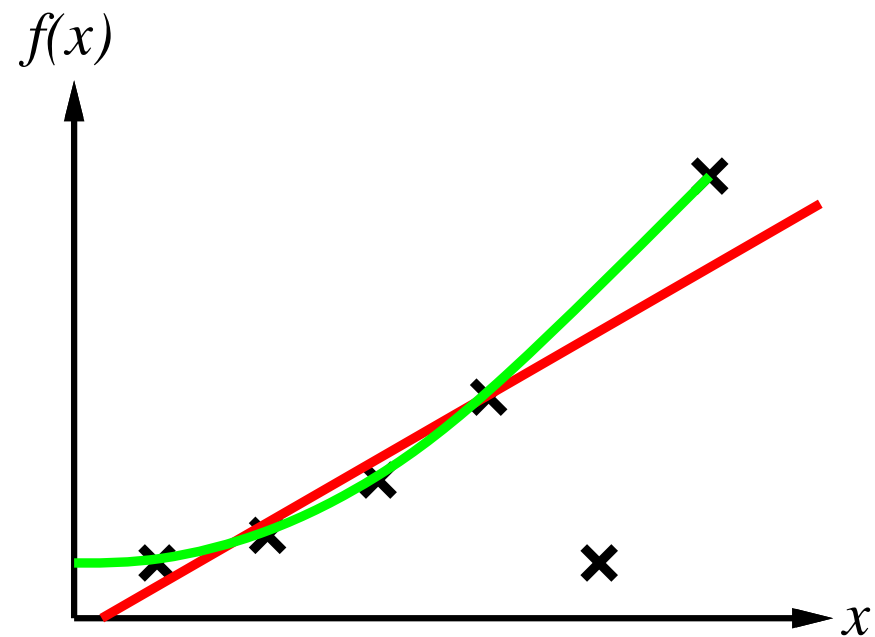


METODA INDUKTIVNÍHO UČENÍ

zkonstruuj/uprav h , aby souhlasila s f na trénovacích příkladech

h je konzistentní \Leftrightarrow souhlasí f na všech příkladech

např. hledání křivky:

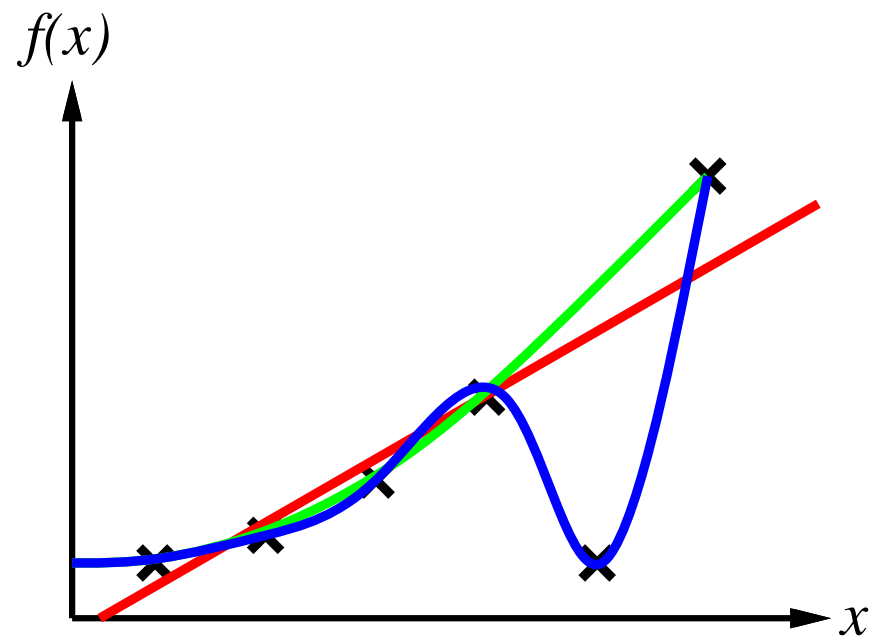


METODA INDUKTIVNÍHO UČENÍ

zkonstruuj/uprav h , aby souhlasila s f na trénovacích příkladech

h je konzistentní \Leftrightarrow souhlasí f na všech příkladech

např. hledání křivky:

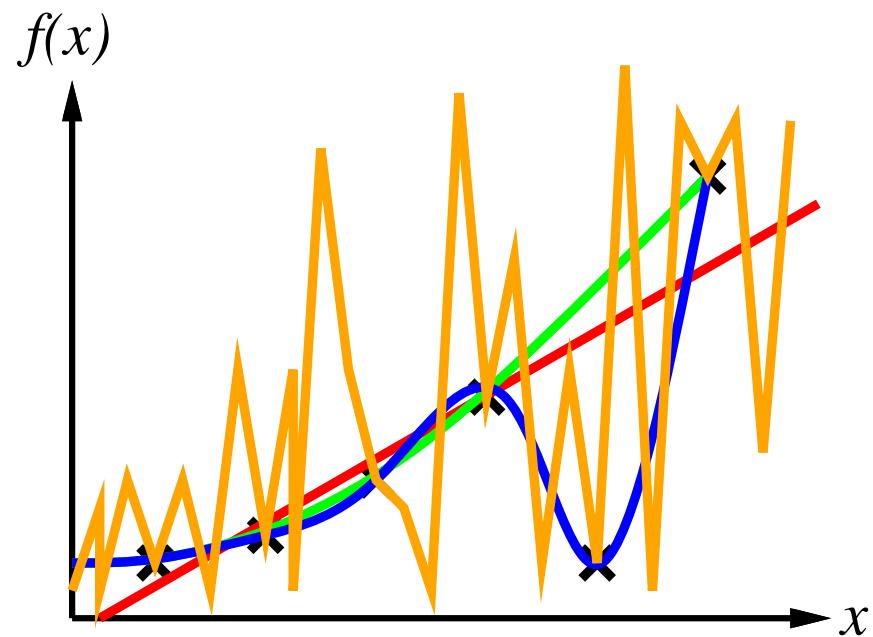


METODA INDUKTIVNÍHO UČENÍ

zkonstruuj/uprav h , aby souhlasila s f na trénovacích příkladech

h je konzistentní \Leftrightarrow souhlasí f na všech příkladech

např. hledání křivky:

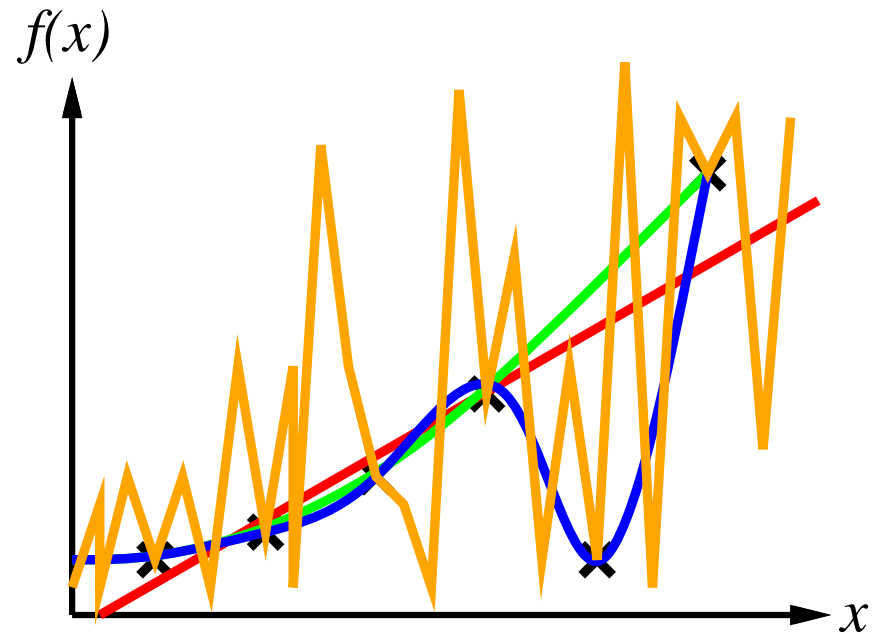


METODA INDUKTIVNÍHO UČENÍ

zkonstruuj/uprav h , aby souhlasila s f na trénovacích příkladech

h je konzistentní \Leftrightarrow souhlasí f na všech příkladech

např. hledání křivky:



pravidlo **Ockhamovy břitvy** – maximalizovat kombinaci konzistence a jednoduchosti (*nejjednodušší ze správných je nejlepší*)

METODA INDUKTIVNÍHO UČENÍ pokrač.

hodně záleží na **prostoru hypotéz**, jsou na něj protichůdné požadavky:

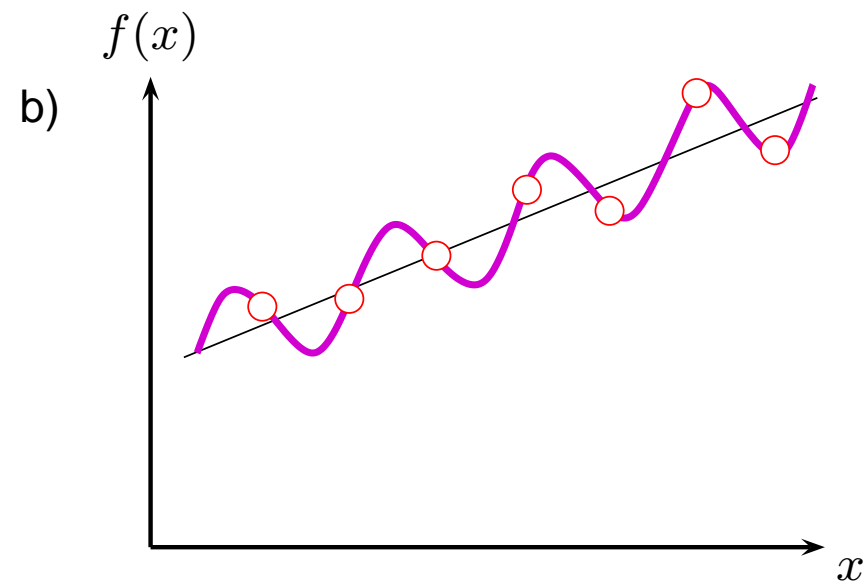
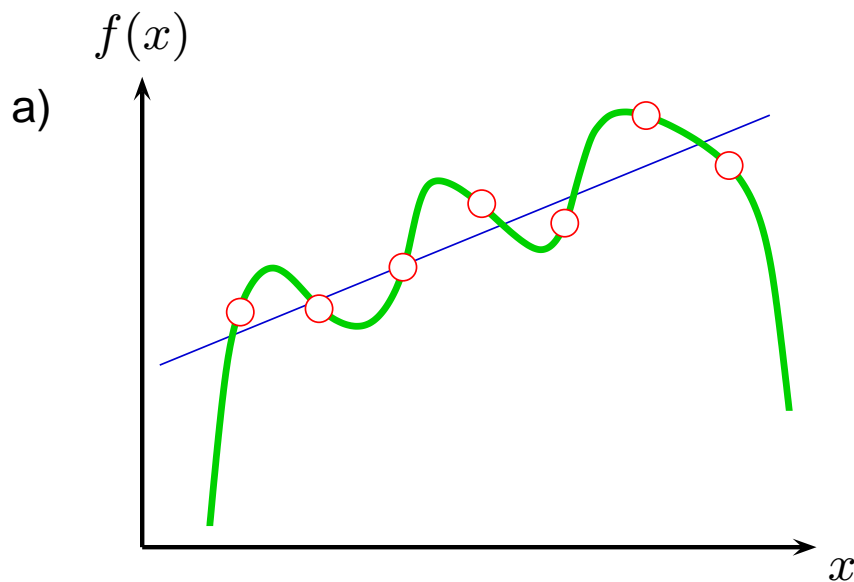
- pokrýt co **největší množství** hledaných funkcí
- udržet **nízkou výpočetní složitost** hypotézy

METODA INDUKTIVNÍHO UČENÍ pokrač.

hodně záleží na **prostoru hypotéz**, jsou na něj protichůdné požadavky:

- pokrýt co **největší množství** hledaných funkcí
- udržet **nízkou výpočetní složitost** hypotézy

např.



- stejná sada 7 bodů
- nejmenší konzistentní polynom – polynom 6-tého stupně (7 parametrů)
- může být výhodnější použít nekonzistentní **přibližnou** lineární funkci
- přitom existuje konzistentní funkce $ax + by + c \sin x$

ATRIBUTOVÁ REPREZENTACE PŘÍKLADŮ

příklady popsané výčtem **hodnot atributů** (libovolných hodnot)

např. rozhodování, zda **počkat na uvolnění stolu v restauraci**:

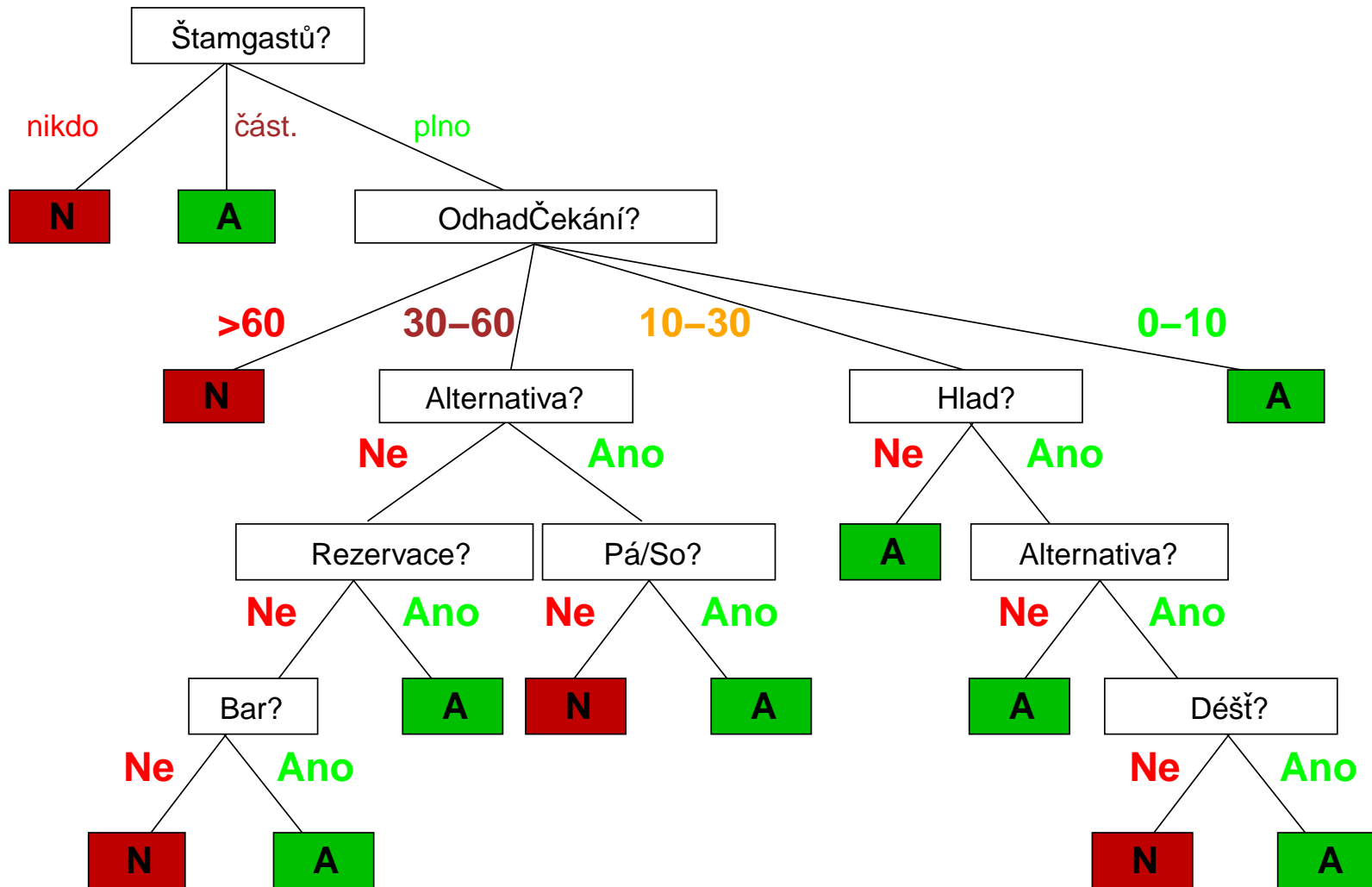
Příklad	Atributy										počkat?
	<i>Alt</i>	<i>Bar</i>	<i>Pá/So</i>	<i>Hlad</i>	<i>Štam</i>	<i>Cen</i>	<i>Děšť'</i>	<i>Rez</i>	<i>Typ</i>	<i>ČekD</i>	
X_1	A	N	N	A	část.	\$\$\$	N	A	mexická	0–10	A
X_2	A	N	N	A	plno	\$	N	N	asijská	30–60	N
X_3	N	A	N	N	část.	\$	N	N	bufet	0–10	A
X_4	A	N	A	A	plno	\$	N	N	asijská	10–30	A
X_5	A	N	A	N	plno	\$\$\$	N	A	mexická	>60	N
X_6	N	A	N	A	část.	\$\$	A	A	pizzerie	0–10	A
X_7	N	A	N	N	nikdo	\$	A	N	bufet	0–10	N
X_8	N	N	N	A	část.	\$\$	A	A	asijská	0–10	A
X_9	N	A	A	N	plno	\$	A	N	bufet	>60	N
X_{10}	A	A	A	A	plno	\$\$\$	N	A	pizzerie	10–30	N
X_{11}	N	N	N	N	nikdo	\$	N	N	asijská	0–10	N
X_{12}	A	A	A	A	plno	\$	N	N	bufet	30–60	A

Ohodnocení tvoří **klasifikaci** příkladů – **pozitivní** (A) a **negativní** (N)

✓ ●	Učení	2
⇒ ●	Rozhodovací stromy	9
●	Neuronové sítě	22

ROZHODOVACÍ STROMY

jedna z možných reprezentací hypotéz – rozhodovací strom pro určení, jestli počkat na stůl:



VYJADŘOVACÍ SÍLA ROZHODOVACÍCH STROMŮ

rozhodovací stromy vyjádří libovolnou **Booleovskou funkci vstupních atributů** \rightarrow odpovídá **výrokové logice**

$\forall s \text{ počkat?}(s) \Leftrightarrow (P_1(s) \vee P_2(s) \vee \dots \vee P_n(s)),$ kde $P_i(s) = (A_1(s) = V_1 \wedge \dots \wedge A_m(s) = V_m)$

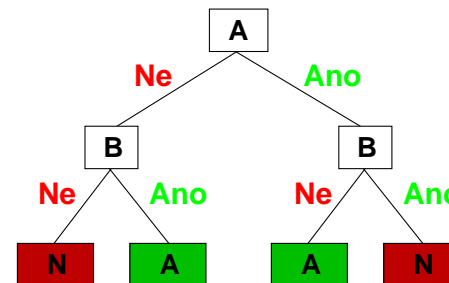
VYJADŘOVACÍ SÍLA ROZHODOVACÍCH STROMŮ

rozhodovací stromy vyjádří libovolnou **Booleovskou funkci vstupních atributů** → odpovídá **výrokové logice**

$$\forall s \text{ počkat?}(s) \Leftrightarrow (P_1(s) \vee P_2(s) \vee \dots \vee P_n(s)), \quad \text{kde } P_i(s) = (A_1(s) = V_1 \wedge \dots \wedge A_m(s) = V_m)$$

pro libovolnou Booleovskou funkci → řádek v pravdivostní tabulce = **cesta ve stromu** (od kořene k listu)

A	B	A xor B
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

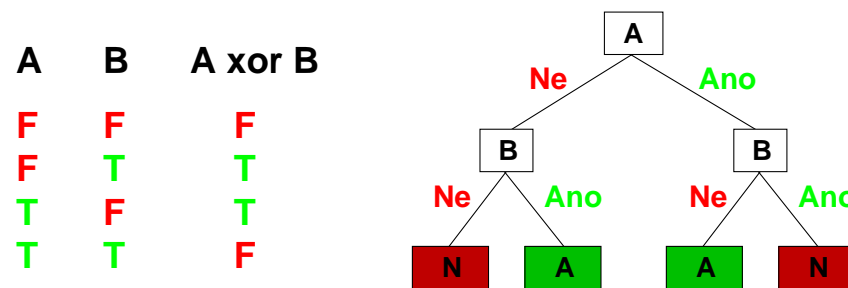


VYJADŘOVACÍ SÍLA ROZHODOVACÍCH STROMŮ

rozhodovací stromy vyjádří libovolnou **Booleovskou funkci vstupních atributů** → odpovídá **výrokové logice**

$$\forall s \text{ počkat?}(s) \Leftrightarrow (P_1(s) \vee P_2(s) \vee \dots \vee P_n(s)), \quad \text{kde } P_i(s) = (A_1(s) = V_1 \wedge \dots \wedge A_m(s) = V_m)$$

pro libovolnou Booleovskou funkci → řádek v pravdivostní tabulce = **cesta ve stromu** (od kořene k listu)



triviálně

pro libovolnou trénovací sadu existuje konzistentní rozhodovací strom s jednou cestou k listům pro každý příklad

ale takový strom pravděpodobně nebude generalizovat na nové příklady

chceme najít co možná **kompaktní** rozhodovací strom

PROSTOR HYPOTÉZ

1. vezměme pouze Booleovské atributy, bez dalšího omezení

Kolik existuje různých rozhodovacích stromů s n Booleovskými atributy?

PROSTOR HYPOTÉZ

1. vezměme pouze Booleovské atributy, bez dalšího omezení

Kolik existuje různých rozhodovacích stromů s n Booleovskými atributy?

= počet všech Booleovských funkcí nad těmito atributy

PROSTOR HYPOTÉZ

1. vezměme pouze Booleovské atributy, bez dalšího omezení

Kolik existuje různých rozhodovacích stromů s n Booleovskými atributy?

= počet všech Booleovských funkcí nad těmito atributy

= počet různých pravdivostních tabulek s 2^n řádky

PROSTOR HYPOTÉZ

1. vezměme pouze Booleovské atributy, bez dalšího omezení

Kolik existuje různých rozhodovacích stromů s n Booleovskými atributy?

= počet všech Booleovských funkcí nad těmito atributy

= počet různých pravdivostních tabulek s 2^n řádky = 2^{2^n}

např. pro 6 atributů existuje 18 446 744 073 709 551 616 různých rozhodovacích stromů

PROSTOR HYPOTÉZ

1. vezměme pouze Booleovské atributy, bez dalšího omezení

Kolik existuje různých rozhodovacích stromů s n Booleovskými atributy?

= počet všech Booleovských funkcí nad těmito atributy

= počet různých pravdivostních tabulek s 2^n řádky = 2^{2^n}

např. pro 6 atributů existuje 18 446 744 073 709 551 616 různých rozhodovacích stromů

2. když se omezíme pouze na konjunktivní hypotézy ($Hlad \wedge \neg Déšť'$)

Kolik existuje takových čistě konjunktivních hypotéz?

PROSTOR HYPOTÉZ

1. vezměme pouze Booleovské atributy, bez dalšího omezení

Kolik existuje různých rozhodovacích stromů s n Booleovskými atributy?

= počet všech Booleovských funkcí nad těmito atributy

= počet různých pravdivostních tabulek s 2^n řádky = 2^{2^n}

např. pro 6 atributů existuje 18 446 744 073 709 551 616 různých rozhodovacích stromů

2. když se omezíme pouze na konjunktivní hypotézy ($Hlad \wedge \neg Déšť'$)

Kolik existuje takových čistě konjunktivních hypotéz?

každý atribut může být v pozitivní nebo negativní formě nebo nepoužit

$\Rightarrow 3^n$ různých konjunktivních hypotéz (pro 6 atributů = 729)

PROSTOR HYPOTÉZ

1. vezměme pouze Booleovské atributy, bez dalšího omezení

Kolik existuje různých rozhodovacích stromů s n Booleovskými atributy?

= počet všech Booleovských funkcí nad těmito atributy

= počet různých pravdivostních tabulek s 2^n řádky = 2^{2^n}

např. pro 6 atributů existuje 18 446 744 073 709 551 616 různých rozhodovacích stromů

2. když se omezíme pouze na konjunktivní hypotézy ($Hlad \wedge \neg Déšť'$)

Kolik existuje takových čistě konjunktivních hypotéz?

každý atribut může být v pozitivní nebo negativní formě nebo nepoužít

$\Rightarrow 3^n$ různých konjunktivních hypotéz (pro 6 atributů = 729)

prostor hypotéz s větší **expresivitou**

- zvyšuje šance, že najdeme přesné vyjádření cílové funkce
- ALE zvyšuje i počet možných hypotéz, které jsou konzistentní s trénovací množinou
 \Rightarrow můžeme získat nižší kvalitu předpovědí (generalizace)

UČENÍ VE FORMĚ ROZHODOVACÍCH STROMŮ

❑ triviální konstrukce rozhodovacího stromu

- pro každý příklad v trénovací sadě přidej jednu cestu od kořene k listu
- na stejných příkladech jako v trénovací sadě bude fungovat přesně
- na nových příkladech se bude chovat náhodně – **negeneralizuje** vzory z příkladů, pouze **kopíruje** pozorování

UČENÍ VE FORMĚ ROZHODOVACÍCH STROMŮ

❑ triviální konstrukce rozhodovacího stromu

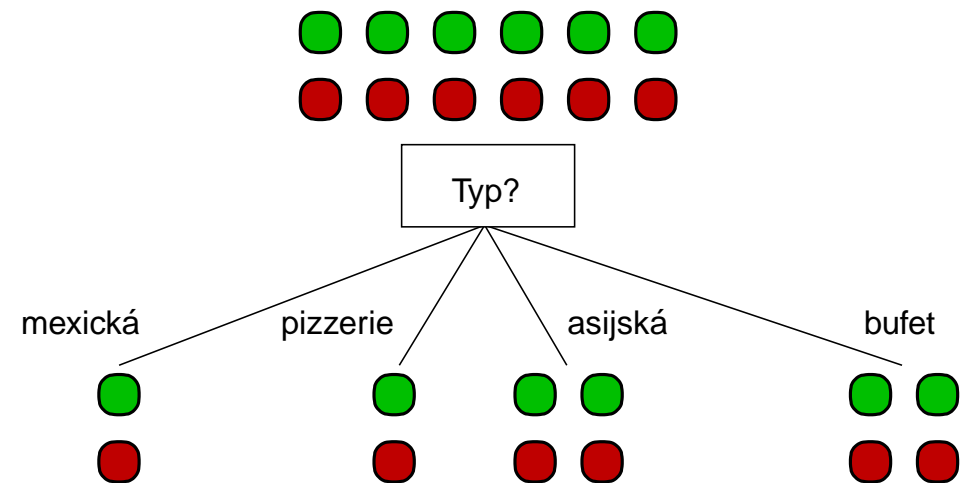
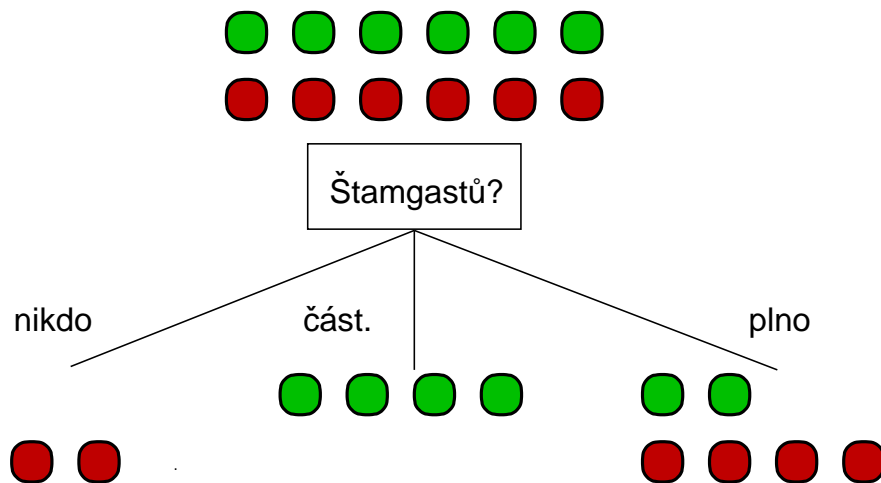
- pro každý příklad v trénovací sadě přidej jednu cestu od kořene k listu
- na stejných příkladech jako v trénovací sadě bude fungovat přesně
- na nových příkladech se bude chovat náhodně – **negeneralizuje** vzory z příkladů, pouze **kopíruje** pozorování

❑ heuristická konstrukce kompaktního stromu

- chceme najít **nejmenší** rozhodovací strom, který souhlasí s příklady
- vlastní nalezení nejmenšího stromu je ovšem příliš složité
 - heuristikou najdeme alespoň **dostatečně malý** 😊
- hlavní myšlenka – vybíráme atributy pro test v co nejlepším **pořadí**

VÝBĚR ATRIBUTU

myšlenka – **dobrý atribut** rozdělí příklady na podmnožiny, které jsou (nejlépe) “všechny pozitivní” nebo “všechny negativní”



Štamgastů? je lepší volba atributu ← dává lepší **informaci** o vlastní **klasifikaci** příkladů

VÝBĚR ATRIBUTU – MÍRA INFORMACE

informace – odpovídá na **otázku**

čím **méně** dopředu vím o výsledku obsaženém v odpovědi → tím **více** informace je v ní obsaženo

měřítko:

1 bit = odpověď na Booleovskou otázku s pravděpodobností odpovědi $\langle P(T) = \frac{1}{2}, P(F) = \frac{1}{2} \rangle$

VÝBĚR ATRIBUTU – MÍRA INFORMACE

informace – odpovídá na **otázku**

čím **méně** dopředu vím o výsledku obsaženém v odpovědi → tím **více** informace je v ní obsaženo

měřítko:

1 bit = odpověď na Booleovskou otázku s pravděpodobnostmi odpovědi $\langle P(T) = \frac{1}{2}, P(F) = \frac{1}{2} \rangle$

pro pravděpodobnosti všech odpovědí $\langle P(v_1), \dots, P(v_n) \rangle \rightarrow$ **míra informace** v odpovědi obsažená

$$I(\langle P(v_1), \dots, P(v_n) \rangle) = \sum_{i=1}^n -P(v_i) \log_2 P(v_i)$$

tato míra se také nazývá **entropie**

VÝBĚR ATRIBUTU – MÍRA INFORMACE

informace – odpovídá na **otázku**

čím **méně** dopředu vím o výsledku obsaženém v odpovědi → tím **více** informace je v ní obsaženo

měřítko:

1 bit = odpověď na Booleovskou otázku s pravděpodobnostmi odpovědi $\langle P(T) = \frac{1}{2}, P(F) = \frac{1}{2} \rangle$

pro pravděpodobnosti všech odpovědí $\langle P(v_1), \dots, P(v_n) \rangle$ → **míra informace** v odpovědi obsažená

$$I(\langle P(v_1), \dots, P(v_n) \rangle) = \sum_{i=1}^n -P(v_i) \log_2 P(v_i)$$

tato míra se také nazývá **entropie**

např. pro házení mincí: $I(\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle) = -\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} = 1$ bit

pro házení *falešnou* mincí, která dává na 99% vždy jednu stranu mince:

$$I(\langle \frac{1}{100}, \frac{99}{100} \rangle) = -\frac{1}{100} \log_2 \frac{1}{100} - \frac{99}{100} \log_2 \frac{99}{100} = 0.08 \text{ bitů}$$

POUŽITÍ MÍRY INFORMACE PRO VÝBĚR ATRIBUTU

předpokládejme, že máme p pozitivních a n negativních příkladů

$\Rightarrow I\left(\left\langle \frac{p}{p+n}, \frac{n}{p+n} \right\rangle\right)$ bitů je potřeba pro klasifikaci nového příkladu

např. pro X_1, \dots, X_{12} z volby čekání na stůl je $p = n = 6$, takže potřebujeme 1 bit

POUŽITÍ MÍRY INFORMACE PRO VÝBĚR ATRIBUTU

předpokládejme, že máme p pozitivních a n negativních příkladů

$\Rightarrow I\left(\left\langle \frac{p}{p+n}, \frac{n}{p+n} \right\rangle\right)$ bitů je potřeba pro klasifikaci nového příkladu

např. pro X_1, \dots, X_{12} z volby čekání na stůl je $p = n = 6$, takže potřebujeme 1 bit

výběr atributu – *kolik informace nám dá test na hodnotu atributu A ?*

POUŽITÍ MÍRY INFORMACE PRO VÝBĚR ATRIBUTU

předpokládejme, že máme p pozitivních a n negativních příkladů

$\Rightarrow I\left(\left\langle \frac{p}{p+n}, \frac{n}{p+n} \right\rangle\right)$ bitů je potřeba pro klasifikaci nového příkladu

např. pro X_1, \dots, X_{12} z volby čekání na stůl je $p = n = 6$, takže potřebujeme 1 bit

výběr atributu – *kolik informace nám dá test na hodnotu atributu A ?*

= rozdíl odhadu odpovědi **před** a **po** testu atributu

POUŽITÍ MÍRY INFORMACE PRO VÝBĚR ATRIBUTU

předpokládejme, že máme p pozitivních a n negativních příkladů

$\Rightarrow I\left(\left\langle \frac{p}{p+n}, \frac{n}{p+n} \right\rangle\right)$ bitů je potřeba pro klasifikaci nového příkladu

např. pro X_1, \dots, X_{12} z volby čekání na stůl je $p = n = 6$, takže potřebujeme 1 bit

výběr atributu – kolik informace nám dá test na hodnotu atributu A ?

= rozdíl odhadu odpovědi před a po testu atributu

atribut A rozdělí sadu příkladů E na podmnožiny E_i (nejlépe, že \forall potřebuje méně informace)

nechť E_i má p_i pozitivních a n_i negativních příkladů

\Rightarrow je potřeba $I\left(\left\langle \frac{p_i}{p_i+n_i}, \frac{n_i}{p_i+n_i} \right\rangle\right)$ bitů pro klasifikaci nového příkladu

\Rightarrow očekávaný počet bitů přes \forall větve je $Remainder(A) = \sum_i \frac{p_i+n_i}{p+n} I\left(\left\langle \frac{p_i}{p_i+n_i}, \frac{n_i}{p_i+n_i} \right\rangle\right)$

\Rightarrow výsledný zisk atributu A je $Gain(A) = I\left(\left\langle \frac{p}{p+n}, \frac{n}{p+n} \right\rangle\right) - Remainder(A)$

výběr atributu = nalezení atributu s nejvyšší hodnotou $Gain(A)$

$Gain(\text{\textit{Štamgastů}}?) \approx 0.541$ bitů $Gain(\text{\textit{Typ}}?) = 0$ bitů

ALGORITMUS IDT – UČENÍ FORMOU ROZHODOVACÍCH STROMŮ

```

% induce_tree( +Attributes, +Examples, – Tree)
induce_tree( _, [], null) :- !.
induce_tree( _, [example( Class,_) | Examples], leaf( Class)) :-
    not (member( example( ClassX, _), Examples), ClassX \== Class), !. %  $\forall$  příklady stejné klasifikace
induce_tree( Attributes, Examples, tree( Attribute, SubTrees)) :-
    choose_attribute( Attributes, Examples, Attribute), !,
    del( Attribute, Attributes, RestAtts),
    attribute( Attribute, Values),
    induce_trees( Attribute, Values, RestAtts, Examples, SubTrees).
induce_tree( _, Examples, leaf( ExClasses)) :- % žádný užitečný atribut, list s sribucí klasifikací
    findall( Class, member( example( Class, _), Examples), ExClasses).

% induce_trees( +Att, +Values, +RestAtts, +Examples, – SubTrees):
% najdi podstromy SubTrees pro podmnožiny příkladů Examples podle hodnot (Values) atributu Att
induce_trees( _, [], -, -, [] ). % No attributes, no subtrees
induce_trees( Att, [Val1 | Vals], RestAtts, Exs, [Val1 : Tree1 | Trees]) :-
    attval_subset( Att = Val1, Exs, ExampleSubset),
    induce_tree( RestAtts, ExampleSubset, Tree1),
    induce_trees( Att, Vals, RestAtts, Exs, Trees).

% attval_subset( +Attribute = +Value, +Examples, – Subset):
% Subset je podmnožina příkladů z Examples, které splňují podmínku Attribute = Value
attval_subset( AttributeValue, Examples, ExampleSubset) :-
    findall( example( Class, Obj),
        (member( example( Class, Obj), Examples), satisfy( Obj, [ AttributeValue ])),
        ExampleSubset).

```

ALGORITMUS IDT – UČENÍ FORMOU ROZHODOVACÍCH STROMŮ pokrač.

```
% satisfy( Object, Description)
```

```
satisfy ( Object, Conj) :- not (member( Att = Val, Conj), member( Att = ValX, Object), ValX \== Val).
```

```
% vybíráme atribut podle "čistoty" množin, na které rozdělí příklady, setof je setřídí podle Impurity
```

```
choose_attribute( Atts, Examples, BestAtt) :-
```

```
  setof( Impurity/Att, (member( Att, Atts), impurity1( Examples, Att, Impurity )), [MinImpurity/BestAtt|_]).
```

```
impurity1( Exs, Att, Imp) :- attribute( Att, AttVals), term_sum( Exs, Att, AttVals, 0, Imp).
```

```
% term_sum( Exs, Att, AttVals, PartialSum, Sum) – vážená suma "čistoty" přes  $\forall$  hodnoty atributu Att
```

```
term_sum( _, _, [], Sum, Sum).
```

```
term_sum( Exs, Att, [Val | Vals], PartSum, Sum) :- length( Exs, N),
```

```
  findall( C, (member( example(C,Desc), Exs), satisfy( Desc, [Att=Val])), ExClasses),
```

```
  % ExClasses = seznam klasifikací (s opakováním) všech příkladů s Att=Val
```

```
  length( ExClasses, NV), NV > 0, !,
```

```
  findall( P, (bagof( 1, member( Class, ExClasses), L), length( L, NVC), P is NVC/NV), ClassDistribution),
```

```
  gini( ClassDistribution, Ginil ),
```

```
  NewPartSum is PartSum + Ginil*NV/N,
```

```
  term_sum( Exs, Att, Vals, NewPartSum, Sum)
```

```
; term_sum( Exs, Att, Vals, PartSum, Sum). % žádné příklady nesplňují Att = Val
```

```
% gini( ProbabilityList, GinilIndex) – míra "čistoty", GiniIndex =  $\sum_{\forall i,j:i \neq j} P_i \cdot P_j \equiv 1 - \sum_{\forall i} P_i \cdot P_i$ 
```

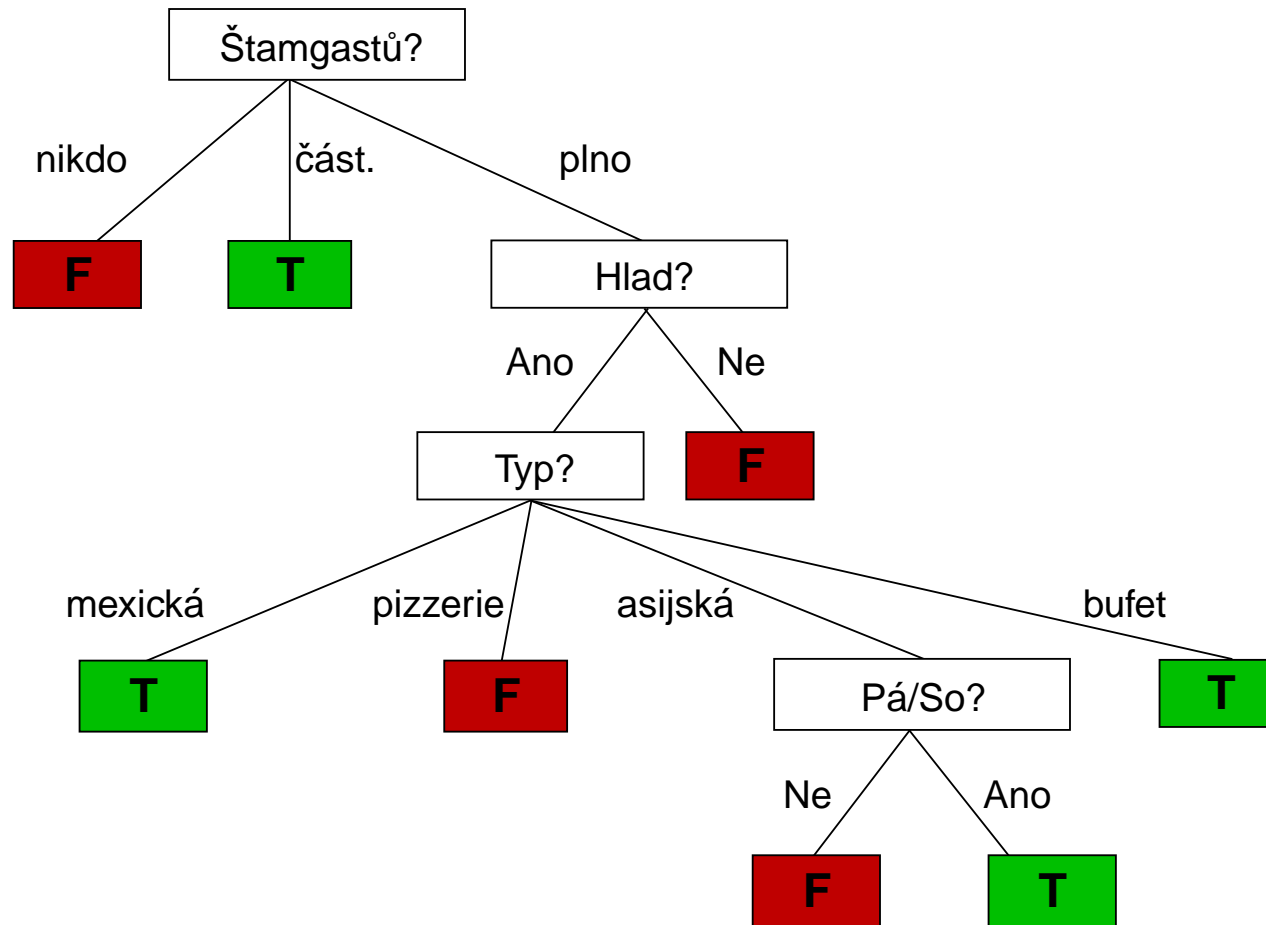
```
gini( Probs, Index) :- square_sum( Probs, 0, SquareSum), Index is 1 - SquareSum.
```

```
square_sum( [], S, S).
```

```
square_sum( [P | Ps], PartS, S) :- NewPartS is PartS + P*P, square_sum( Ps, NewPartS, S).
```


IDT – VÝSLEDNÝ ROZHODOVACÍ STROM

rozhodovací strom **naučený** z 12-ti příkladů:



podstatně jednodušší než strom “z tabulky příkladů”

(slajd 9)

HODNOCENÍ ÚSPĚŠNOSTI UČÍCÍHO ALGORITMU

jak můžeme zjistit, zda $h \approx f$?

HODNOCENÍ ÚSPĚŠNOSTI UČÍCÍHO ALGORITMU

jak můžeme zjistit, zda $h \approx f$?

- dopředu — použít věty Teorie počítačného učení
- po naučení — kontrolou na **jiné trénovací sadě**

HODNOCENÍ ÚSPĚŠNOSTI UČÍCÍHO ALGORITMU

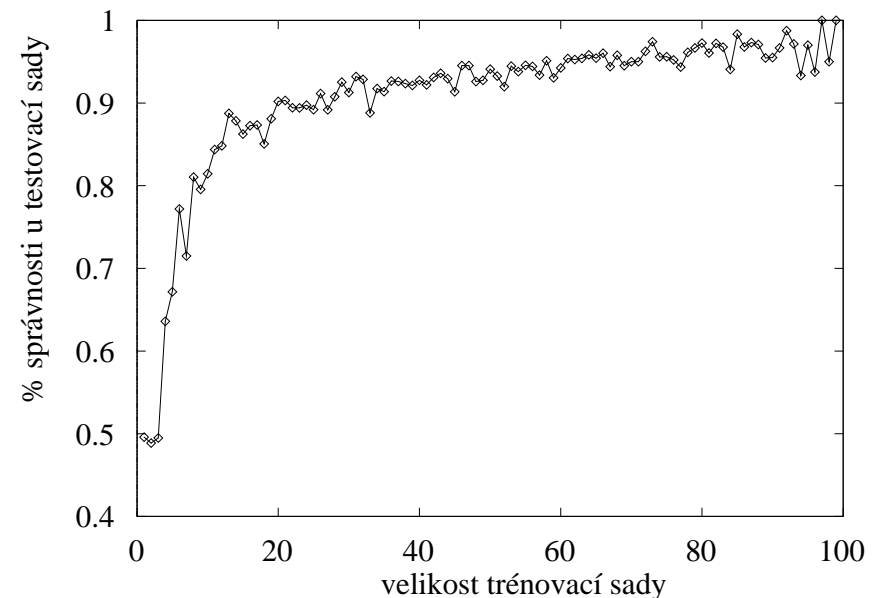
jak můžeme zjistit, zda $h \approx f$?

dopředu — použít věty Teorie počítačného učení
po naučení — kontrolou na jiné trénovací sadě

používaná metodologie:

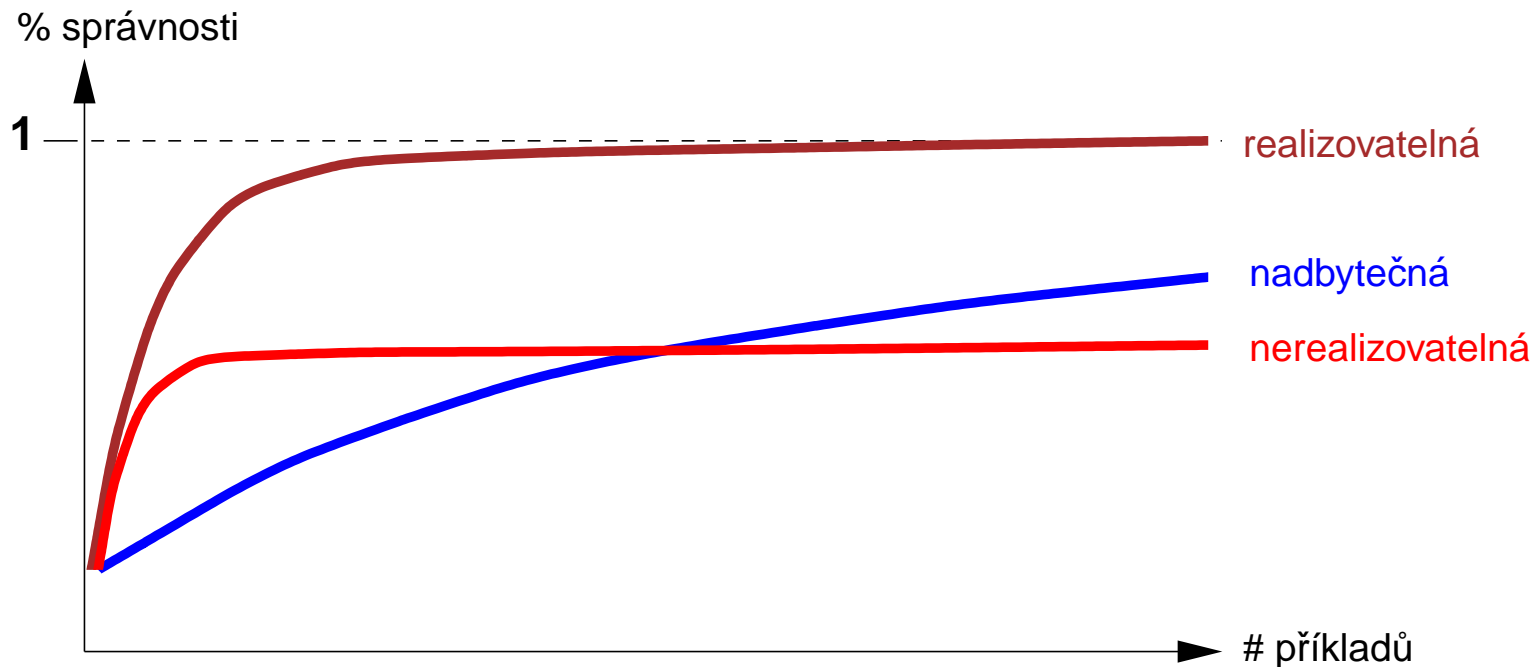
1. vezmeme velkou množinu příkladů
2. rozdělíme ji na 2 množiny – trénovací a testovací
3. aplikujeme učící algoritmus na trénovací sadu, získáme hypotézu h
4. změříme procento příkladů v testovací sadě, které jsou správně klasifikované hypotézou h
5. opakujeme kroky 2–4 pro různé velikosti trénovacích sad a pro náhodně vybrané trénovací sady

křivka učení – závislost velikosti trénovací sady na úspěšnosti



HODNOCENÍ ÚSPĚŠNOSTI UČÍCÍHO ALGORITMU pokrač.

- tvár křivky učení závisí na → je hledaná funkce realizovatelná × nerealizovatelná
funkce může být nerealizovatelná kvůli
- chybějícím atributům
 - omezenému prostoru hypotéz
- naopak nadbytečné expresivité
např. množství nerelevantních atributů



INDUKTIVNÍ UČENÍ – SHRNUÍ

- učení je potřebné pro **neznámé prostředí** (a líné analytiky 😊)
- učící se agent – **výkonnostní komponenta** a **komponenta učení**
- **metoda** učení závisí na *typu výkonnostní komponenty*, dostupné *zpětné vazbě*, *typu a reprezentaci* části, která se má učením zlepšit
- u **učení s dohledem** – cíl je najít nejjednodušší hypotézu přibližně konzistentní s trénovacími příklady
- učení formou rozhodovacích stromů používá **míru informace**
- **kvalita učení** – přesnost odhadu změřená na testovací sadě

✓ ●	Učení	2
✓ ●	Rozhodovací stromy	9
⇒ ●	Neuronové sítě	22

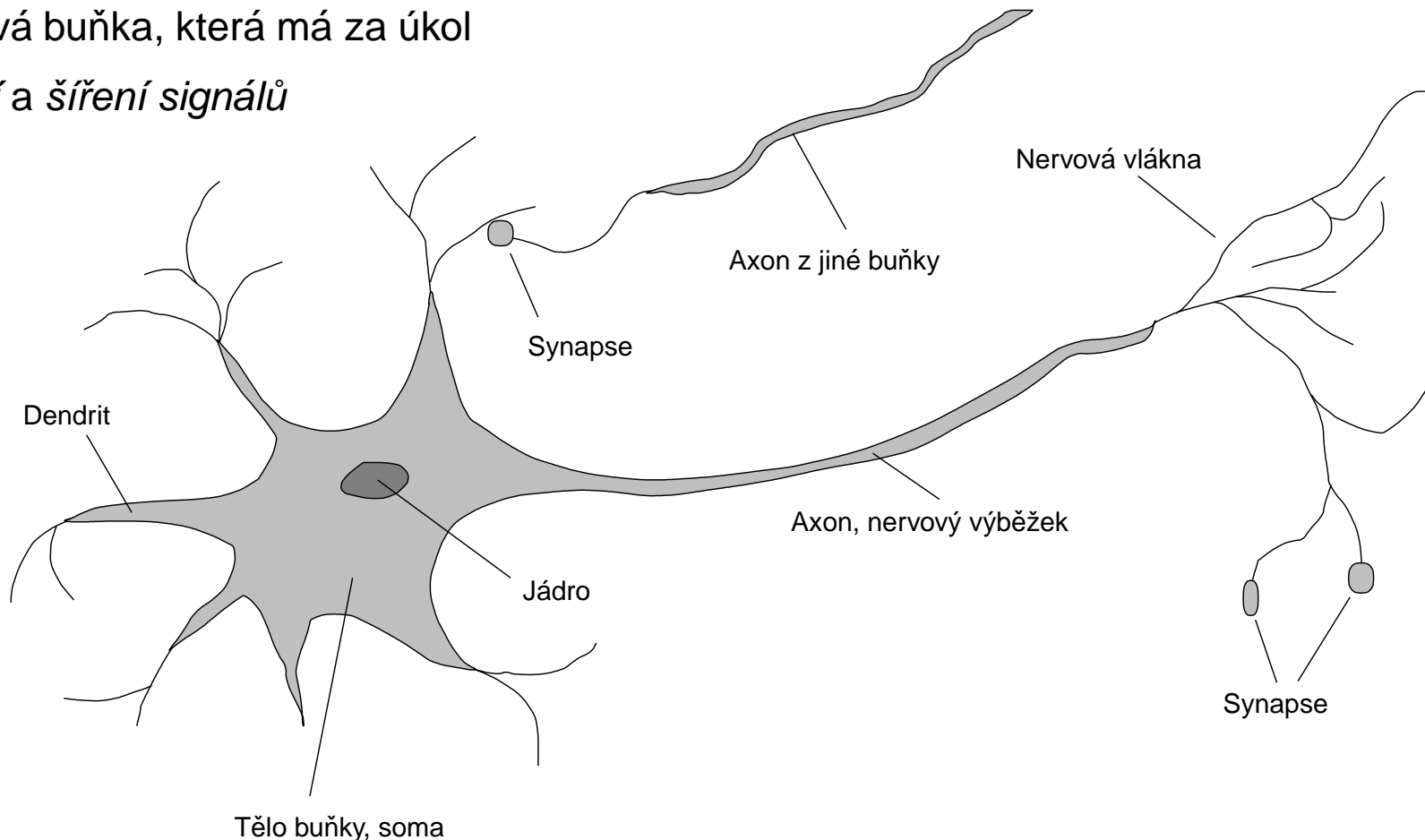
NEURON

mozek – 10^{11} neuronů > 20 typů, 10^{14} synapsí, 1ms–10ms cyklus

nosiče informace – signály = “výkyvy” elektrických potenciálů (se šumem)

neuron – mozková buňka, která má za úkol

sběr, zpracování a šíření signálů



POČÍTAČOVÝ MODEL – NEURONOVÉ SÍTĚ

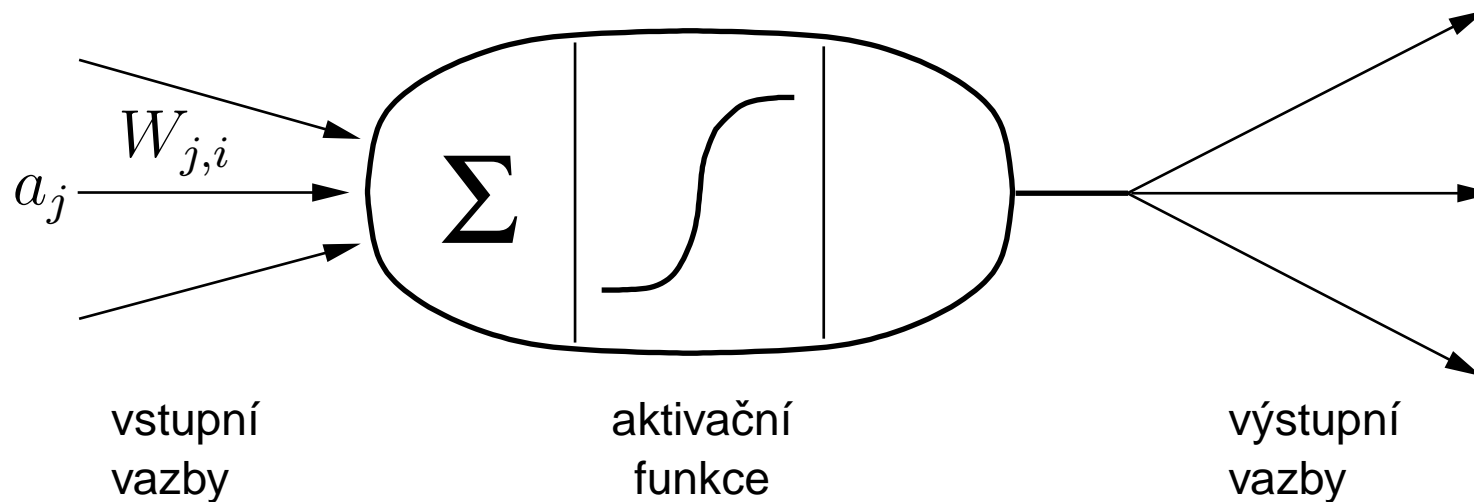
1943 – McCulloch & Pitts – matematický model neuronu

spojené do neuronové sítě – mají schopnost tolerovat šum ve vstupu a učit se

jednotky (*units*) v neuronové síti – jsou propojeny vazbami (*links*)

– vazba z jednotky j do i propaguje aktivaci a_j jednotky j

– každá vazba má číselnou váhu $W_{j,i}$ (síla+znaménko)



POČÍTAČOVÝ MODEL – NEURONOVÉ SÍTĚ

1943 – McCulloch & Pitts – matematický **model** neuronu

spojené do **neuronové sítě** – mají schopnost **tolerovat šum** ve vstupu a **učit se**

jednotky (*units*) v neuronové síti – jsou propojeny **vazbami** (*links*)

– vazba z jednotky j do i propaguje **aktivaci** a_j jednotky j

– každá vazba má číselnou **váhu** $W_{j,i}$ (síla+znaménko)

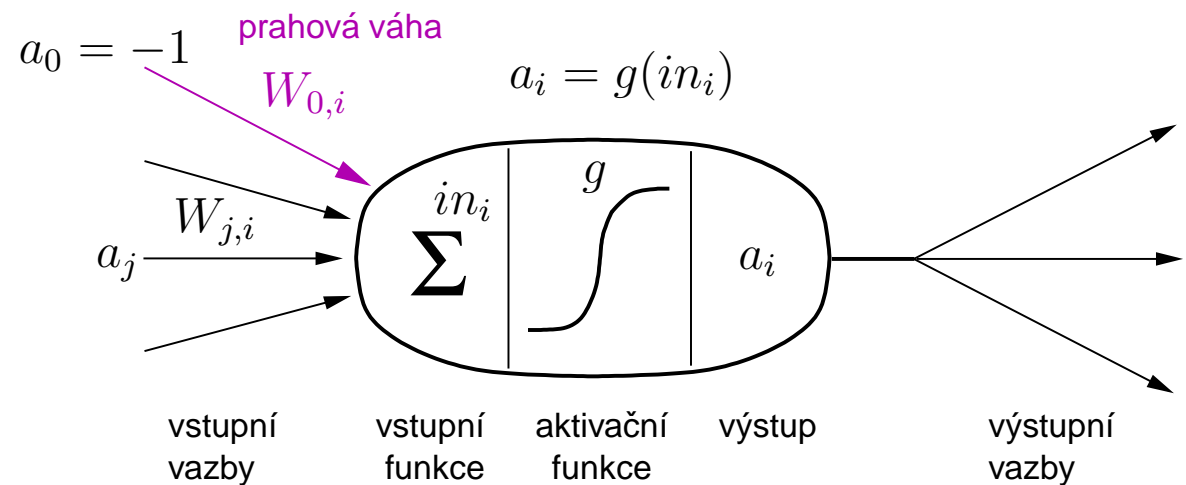
funkce jednotky i :

1. spočítá váženou \sum vstupů = in_i

2. aplikuje **aktivační funkci** g

3. tím získá **výstup** a_i

$$a_i = g(in_i) = g\left(\sum_j W_{j,i} a_j\right)$$



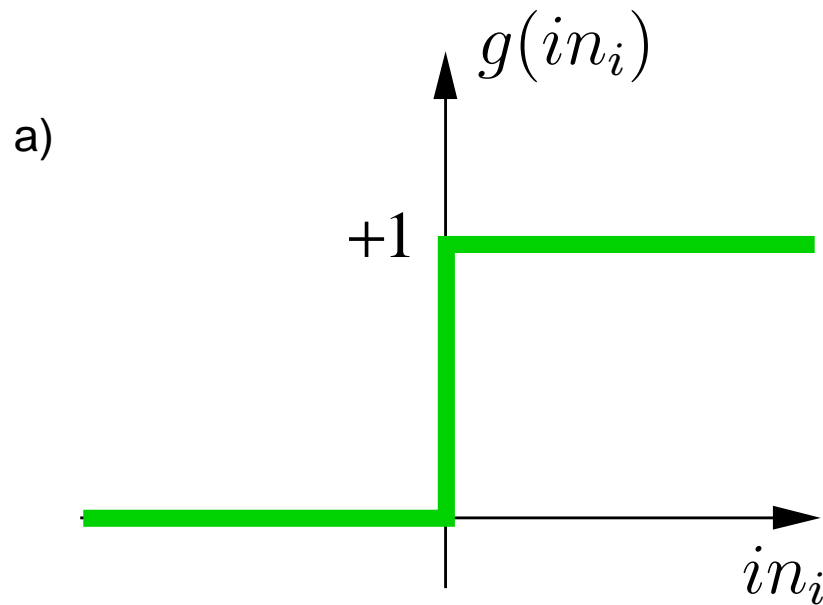
AKTIVAČNÍ FUNKCE

účel aktivační funkce = $\left\{ \begin{array}{l} \text{jednotka má být aktivní } (\approx +1) \text{ pro pozitivní příklady, jinak neaktivní } \approx 0 \\ \text{aktivace musí být nelineární, jinak by celá síť byla lineární} \end{array} \right.$

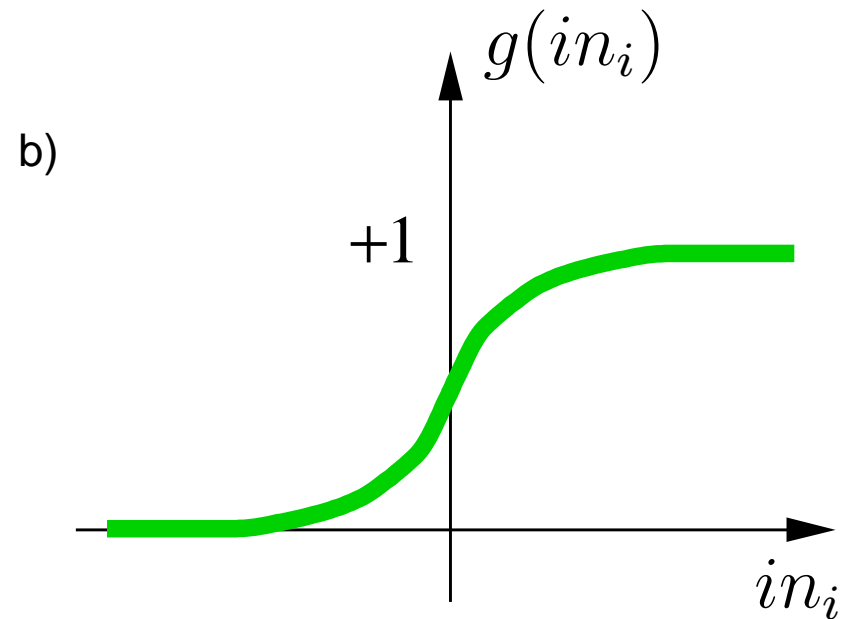
AKTIVAČNÍ FUNKCE

účel aktivační funkce = $\left\{ \begin{array}{l} \text{jednotka má být aktivní } (\approx +1) \text{ pro pozitivní příklady, jinak neaktivní } \approx 0 \\ \text{aktivace musí být nelineární, jinak by celá síť byla lineární} \end{array} \right.$

např.



prahová funkce

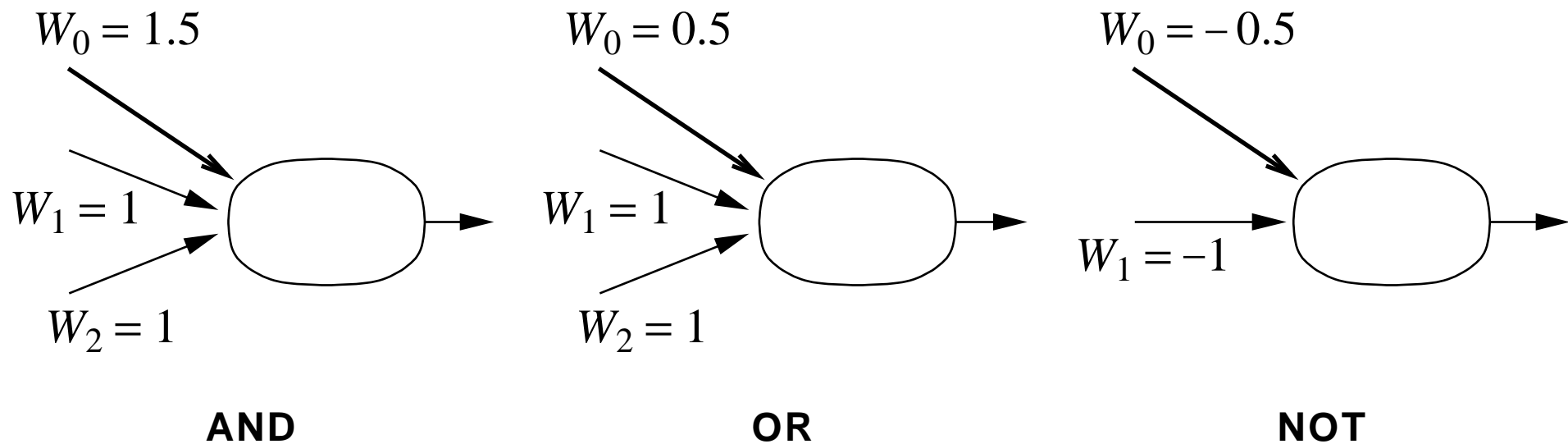


sigmoida $1/(1 + e^{-x})$

je derivovatelná – důležité pro učení

změny prahové váhy $W_{0,i}$ nastavují nulovou pozicí – nastavují práh aktivace

LOGICKÉ FUNKCE POMOCÍ NEURONOVÉ JEDNOTKY



jednotka McCulloch & Pitts sama umí implementovat **základní Booleovské funkce**

⇒ kombinacemi jednotek do sítě můžeme implementovat **libovolnou Booleovskou funkci**

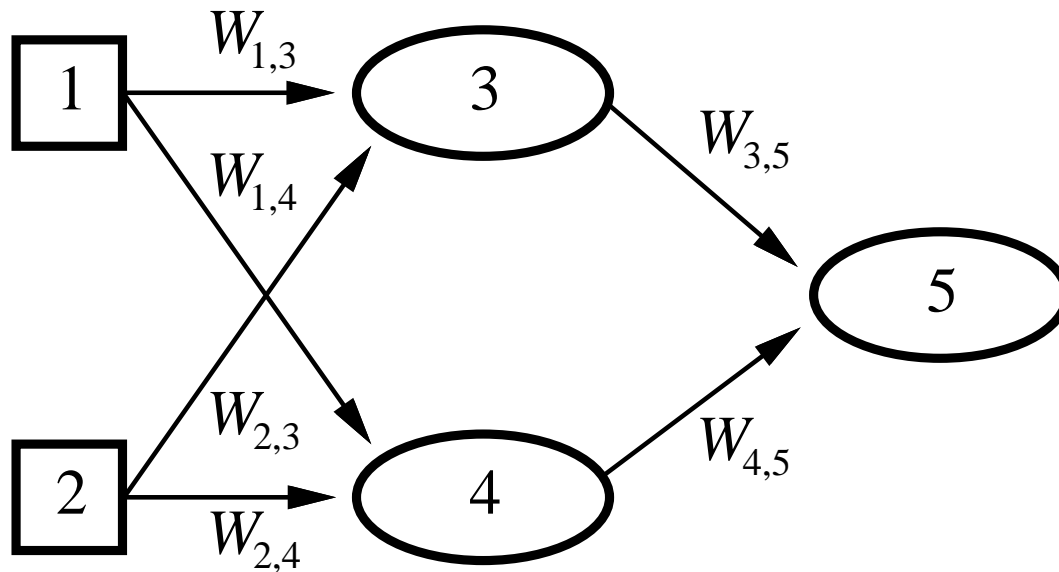
STRUKTURY NEURONOVÝCH SÍTÍ

- ❑ **sítě s předním vstupem** (*feed-forward networks*)
 - necyklické
 - implementují funkce
 - nemají vnitřní paměť

- ❑ **rekurentní sítě** (*recurrent networks*)
 - cyklické
 - vlastní výstup si berou opět na vstup
 - složitější a schopnější
 - výstup má (zpožděný) vliv na aktivaci = **paměť**
 - **Hopfieldovy sítě** – symetrické obousměrné vazby; fungují jako *asociativní paměť*
 - **Boltzmannovy stroje** – pravděpodobnostní aktivační funkce

PŘÍKLAD SÍTĚ S PŘEDNÍM VSTUPEM

síť 5-ti jednotek – 2 vstupní jednotky, 1 skrytá vrstva (2 jednotky), 1 výstupní jednotka

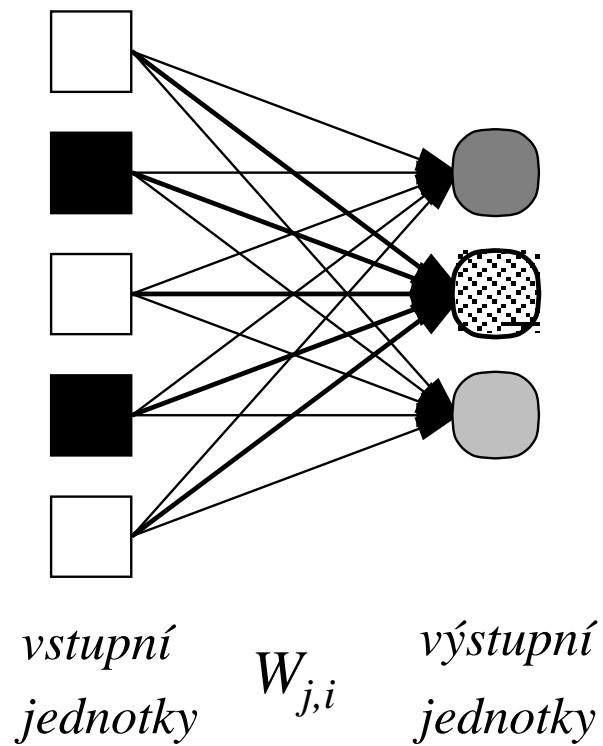


síť s předním vstupem = parametrizovaná nelineární funkce vstupu

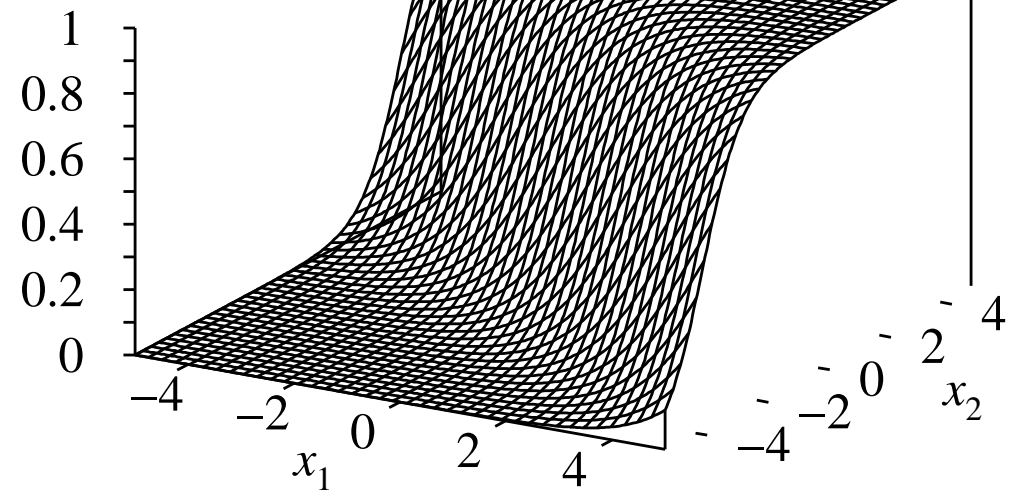
$$\begin{aligned} a_5 &= g(W_{3,5} \cdot a_3 + W_{4,5} \cdot a_4) \\ &= g(W_{3,5} \cdot g(W_{1,3} \cdot a_1 + W_{2,3} \cdot a_2) + W_{4,5} \cdot g(W_{1,4} \cdot a_1 + W_{2,4} \cdot a_2)) \end{aligned}$$

JEDNOVRSTVÁ SÍŤ – PERCEPTRON

- perceptron** – pro Booleovskou funkci 1 výstupní jednotka
– pro složitější klasifikaci – **více výstupních jednotek**



výstup perceptronu



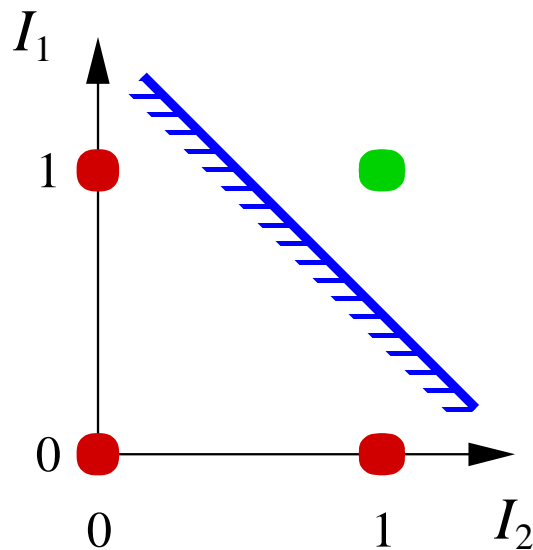
VYJADŘOVACÍ SÍLA PERCEPTRONU

předpokládejme perceptron s g zvolenou jako prahová funkce ($\lfloor \square \rfloor$)

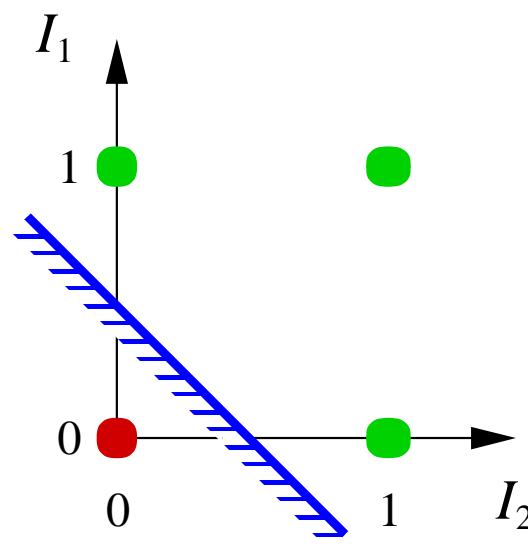
může reprezentovat hodně Booleovských funkcí – AND, OR, NOT, majoritní funkci, ...

$$\sum_j W_j x_j > 0 \quad \text{nebo} \quad \mathbf{W} \cdot \mathbf{x} > 0$$

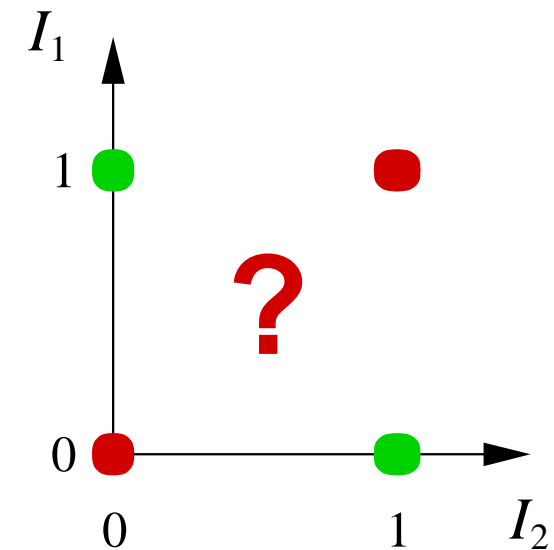
reprezentuje **lineární separátor** (nadrovina) v prostoru vstupu:



a) I_1 and I_2



b) I_1 or I_2



c) I_1 xor I_2

UČENÍ PERCEPTRONU

výhoda perceptronu – existuje jednoduchý **učící algoritmus** pro libovolnou lineárně separabilní funkci

učení perceptronu = upravování vah tak, aby se **snížila chyba** na trénovací sadě

UČENÍ PERCEPTRONU

výhoda perceptronu – existuje jednoduchý učící algoritmus pro libovolnou lineárně separabilní funkci

učení perceptronu = upravování vah tak, aby se snížila chyba na trénovací sadě

kvadratická chyba E pro příklad se vstupem \mathbf{x} a požadovaným (=správným) výstupem y je

$$E = \frac{1}{2} Err^2 \equiv \frac{1}{2} (y - h_{\mathbf{W}}(\mathbf{x}))^2, \quad \text{kde } h_{\mathbf{W}}(\mathbf{x}) \text{ je (vypočítaný) výstup perceptronu}$$

UČENÍ PERCEPTRONU

výhoda perceptronu – existuje jednoduchý **učící algoritmus** pro libovolnou lineárně separabilní funkci

učení perceptronu = upravování vah tak, aby se **snížila chyba** na trénovací sadě

kvadratická chyba E pro příklad se vstupem \mathbf{x} a požadovaným (=správným) výstupem y je

$$E = \frac{1}{2} Err^2 \equiv \frac{1}{2} (y - h_{\mathbf{W}}(\mathbf{x}))^2, \quad \text{kde } h_{\mathbf{W}}(\mathbf{x}) \text{ je (vypočítaný) výstup perceptronu}$$

váhy pro minimální chybu pak hledáme **optimalizačním prohledáváním** spojitého prostoru vah

$$\frac{\partial E}{\partial W_j} = Err \times \frac{\partial Err}{\partial W_j} = Err \times \frac{\partial}{\partial W_j} (y - g(\sum_{j=0}^n W_j x_j)) = -Err \times g'(in) \times x_j$$

pravidlo pro úpravu váhy $W_j \leftarrow W_j + \alpha \times Err \times g'(in) \times x_j$ $\alpha \dots$ učící konstanta (*learning rate*)

např. $Err = y - h_{\mathbf{W}}(\mathbf{x}) > 0 \Rightarrow$ výstup $h_{\mathbf{W}}(\mathbf{x})$ je moc malý

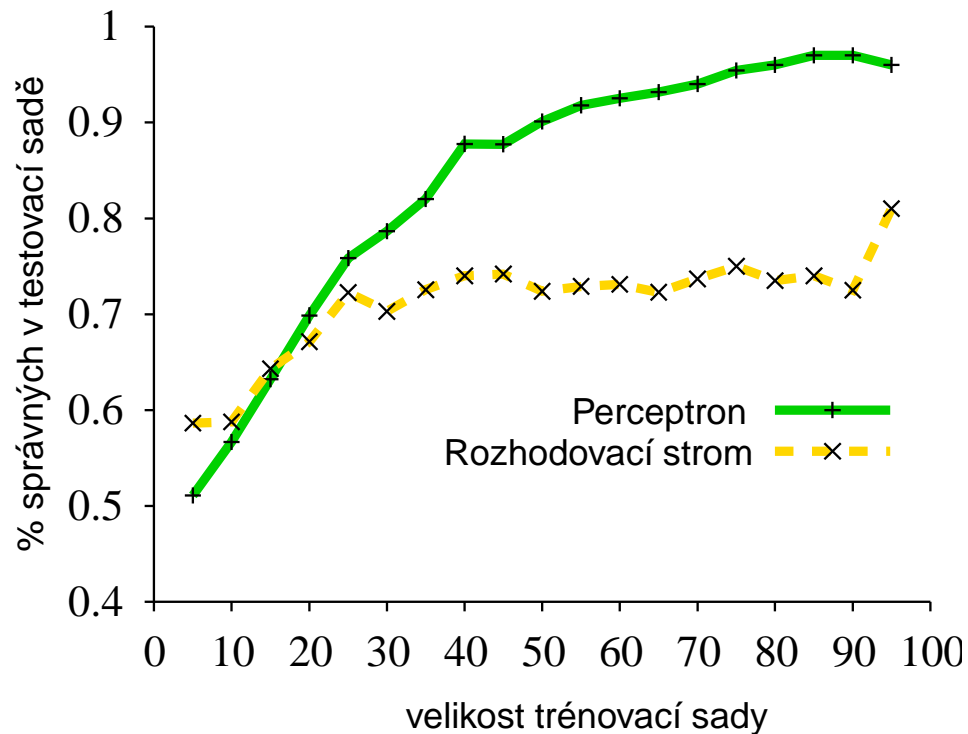
\Rightarrow váhy se musí **zvýšit** pro pozitivní příklady a **snížit** pro negativní

úpravu vah provádíme po každém příkladu \rightarrow opakovaně až do dosažení **ukončovacího kritéria**

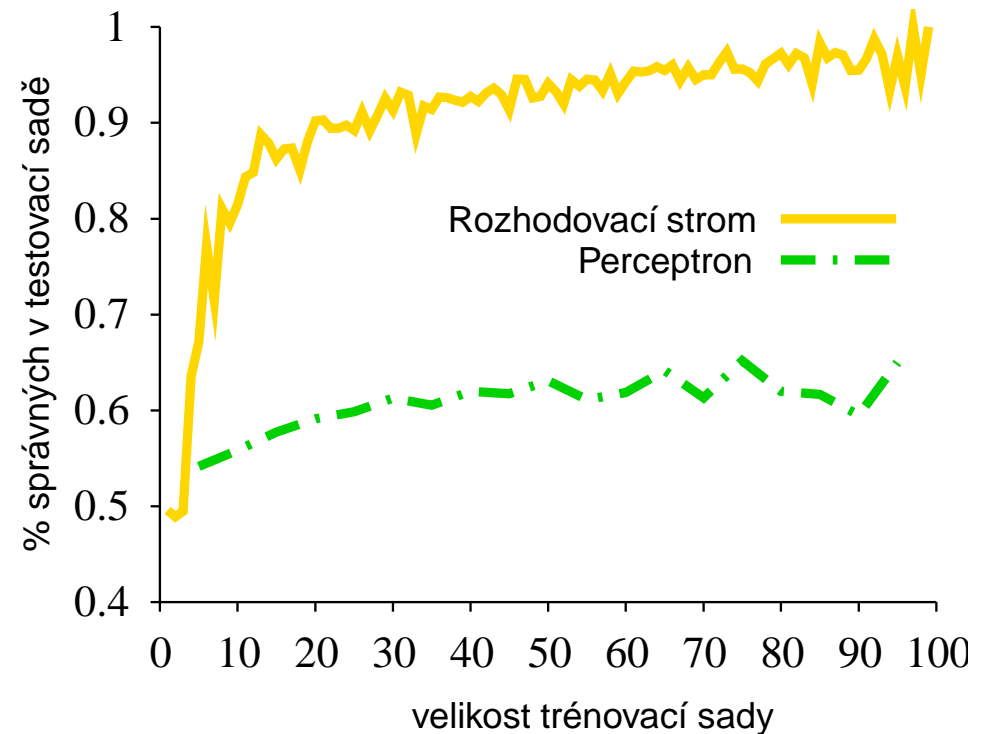
UČENÍ PERCEPTRONU pokrač.

učicí pravidlo pro perceptron **konverguje ke správné funkci** pro libovolnou **lineárně separabilní** množinu dat

a) učení majoritní funkce



b) učení čekání na volný stůl v restauraci



VÍCEVRSTVÉ NEURONOVÉ SÍTĚ

vrstvy jsou obvykle úplně propojené

počet **skrytých jednotek** je obvykle volen experimentálně

výstupní jednotky

a_i

$W_{j,i}$

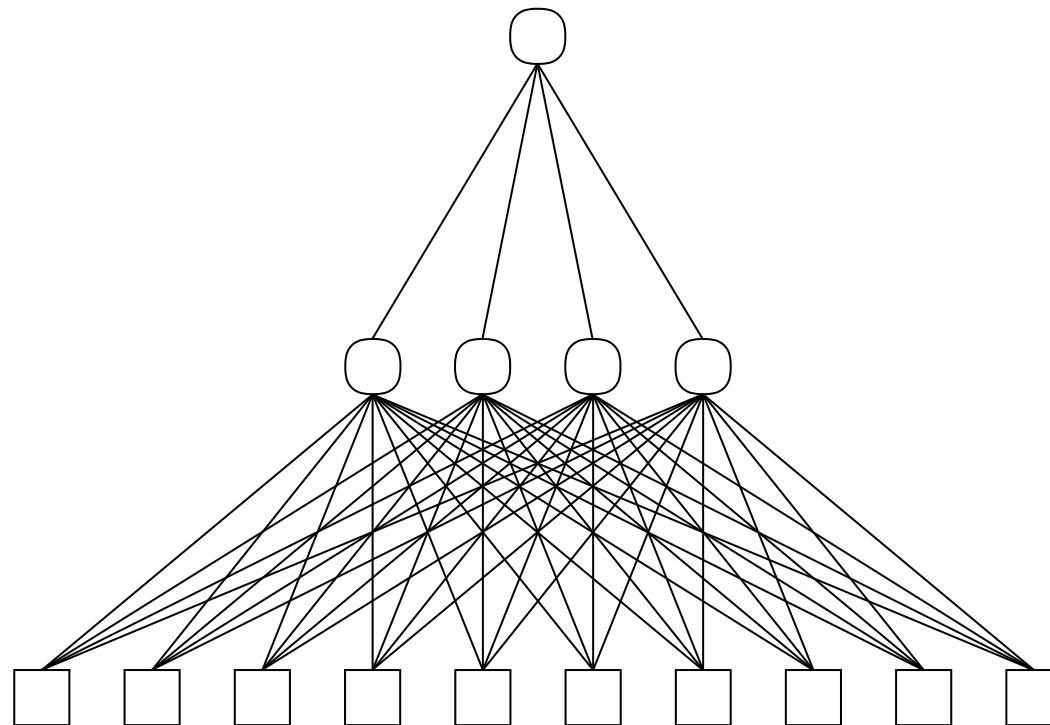
skryté jednotky

a_j

$W_{k,j}$

vstupní jednotky

a_k



VYJADŘOVACÍ SÍLA VÍCEVRSTVÝCH SÍTÍ

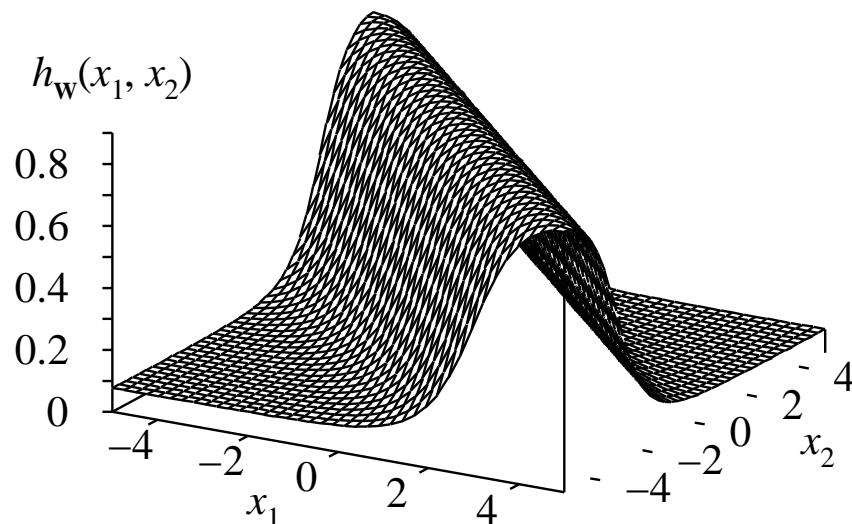
s jednou skrytou vrstvou – všechny **spojité funkce**

se dvěma skrytými vrstvami – **všechny funkce**

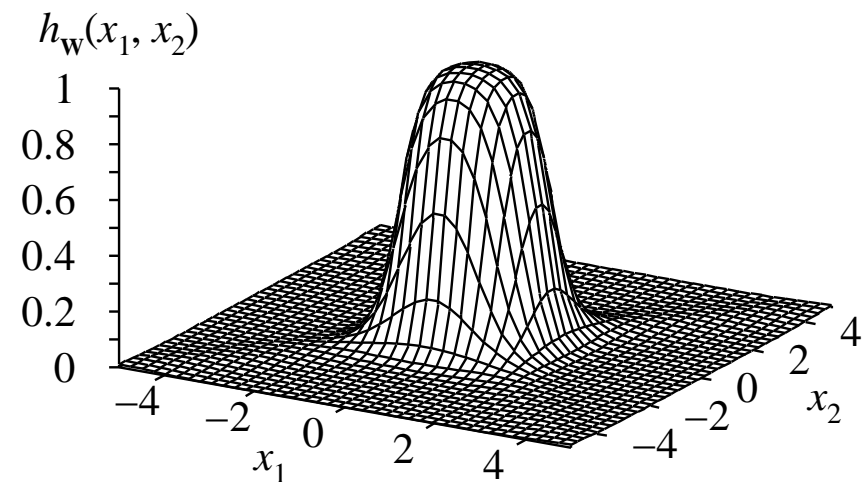
těžko se ovšem pro **konkrétní síť** zjišťuje její prostor **reprezentovatelných funkcí**

např.

dvě “opačné” skryté jednotky vytvoří *hřbet*



dva hřbety vytvoří *homoli*



UČENÍ VÍCEVRSTVÝCH SÍTÍ

pravidla pro úpravu vah:

□ **výstupní vrstva** – stejně jako u perceptronu

$$W_{j,i} \leftarrow W_{j,i} + \alpha \times a_j \times \Delta_i \quad \text{kde} \quad \Delta_i = Err_i \times g'(in_i)$$

UČENÍ VÍCEVRSTVÝCH SÍTÍ

pravidla pro úpravu vah:

- **výstupní vrstva** – stejně jako u perceptronu

$$W_{j,i} \leftarrow W_{j,i} + \alpha \times a_j \times \Delta_i \quad \text{kde} \quad \Delta_i = Err_i \times g'(in_i)$$

- **skryté vrstvy** – **zpětné šíření** (*back-propagation*) chyby z výstupní vrstvy

$$W_{k,j} \leftarrow W_{k,j} + \alpha \times a_k \times \Delta_j \quad \text{kde} \quad \Delta_j = g'(in_j) \sum_i W_{j,i} \Delta_i$$

UČENÍ VÍCEVRSTVÝCH SÍTÍ

pravidla pro úpravu vah:

- **výstupní vrstva** – stejně jako u perceptronu

$$W_{j,i} \leftarrow W_{j,i} + \alpha \times a_j \times \Delta_i \quad \text{kde} \quad \Delta_i = Err_i \times g'(in_i)$$

- **skryté vrstvy** – **zpětné šíření** (*back-propagation*) chyby z výstupní vrstvy

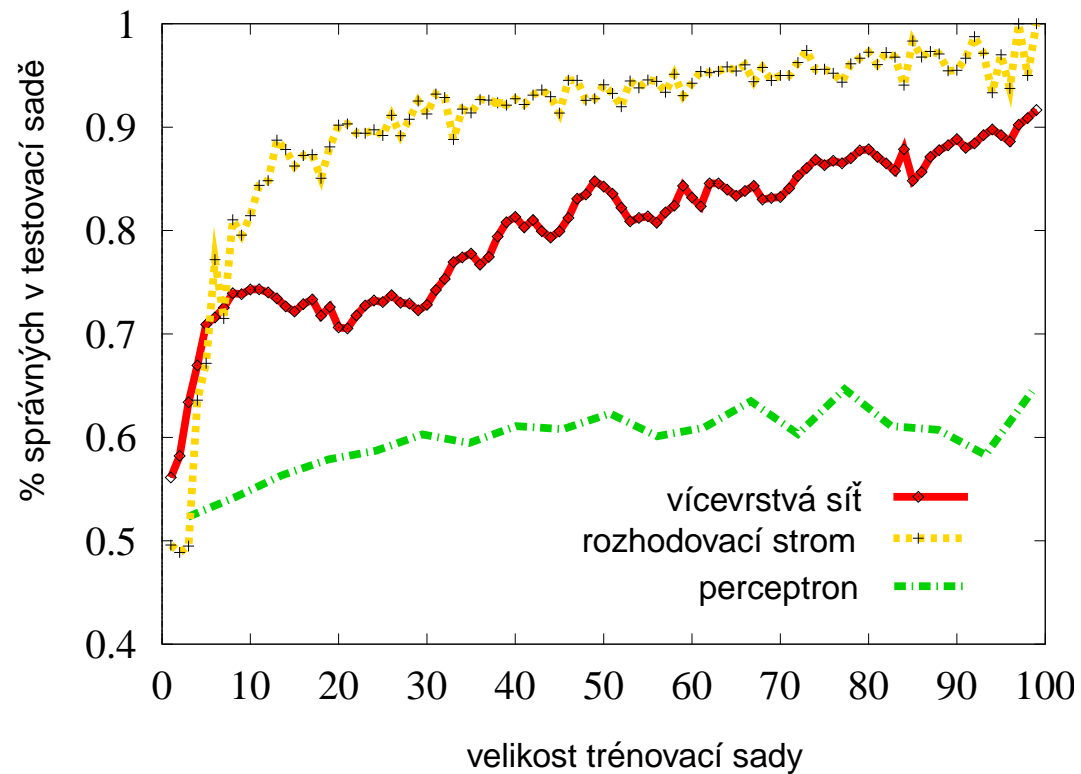
$$W_{k,j} \leftarrow W_{k,j} + \alpha \times a_k \times \Delta_j \quad \text{kde} \quad \Delta_j = g'(in_j) \sum_i W_{j,i} \Delta_i$$

problémy učení:

- dosažení **lokálního minima** chyby
- příliš **pomalá konvergence**
- přílišné **upnutí** na příklady \rightarrow neschopnost generalizovat

UČENÍ VÍCEVRSTVÝCH SÍTÍ pokrač.

vícevrstvá síť se problémem čekání na volný stůl v restauraci učí **znatelně líp** než perceptron



NEURONOVÉ SÍTĚ – SHRNUÍ

- většina mozků má **velké množství** neuronů; každý **neuron** \approx lineární prahová jednotka (?)
- **perceptrony** (jednovrstvé sítě) mají **nízkou** vyjadřovací sílu
- **vícevrstvé sítě** jsou **dostatečně silné**; mohou být trénovány pomocí **zpětného šíření chyby**
- velké množství reálných aplikací
 - rozpoznávání řeči
 - řízení auta
 - rozpoznávání ručně psaného písma
 - ...