# Dekompozice problému, AND/OR grafy

**Aleš Horák**

**E-mail: `hales@fi.muni.cz`**

**`http://nlp.fi.muni.cz/uui/`**

Obsah:

➜ Připomínka – průběžná písemka

➜ Příklad – Hanoiské věže

➜ AND/OR grafy

➜ Prohledávání AND/OR grafů





## Připomínka – průběžná písemka

➜ termín – **příští týden**, **2. listopadu, 10:00, B204**, na přednášce

➜ náhradní termín: **není**

➜ příklady (formou testu – odpovědi A, B, C, D, E, z látky probrané prvních pěti přednáškách, včetně dnešní):

- uveden příklad v Prologu, otázka **Co řeší tento program?**
- uveden příklad v Prologu a cíl, otázka **Co je (návratová) hodnota výsledku?**
- **upravte** (doplňte/změňte řádek) uvedený **program tak, aby. . .**
- uvedeno několik **tvrzení**, potvrďte jejich pravdivost/nepravdivost
- porovnání **vlastností** několika **algoritmů**

➜ rozsah: **4 příklady**

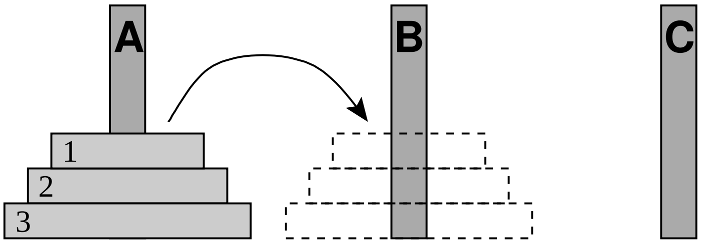
➜ hodnocení: **max. 32 bodů** – za *správnou odpověď* 8 bodů, za *žádnou odpověď* 0 bodů, za *špatnou odpověď* -3 bodů.

## PŘÍKLAD – HANOISKÉ VĚŽE

➜ máme tři tyče: **A**, **B** a **C**.

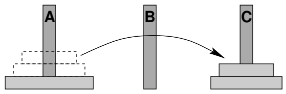
➜ na tyči **A** je (podle velikosti) $n$ kotoučů.

➜ úkol: přeskládat z **A** pomocí **C** na tyč **B** (zaps. $n$(**A, B, C**)) **bez porušení uspořádání**

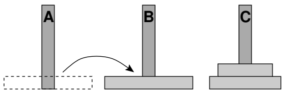



**Můžeme rozložit na fáze:**

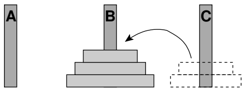
1. přeskládat $n-1$ kotoučů z **A** pomocí **B** na **C**.




2. přeložit 1 kotouč z **A** na **B**




3. přeskládat $n-1$ kotoučů z **C** pomocí **A** na **B**

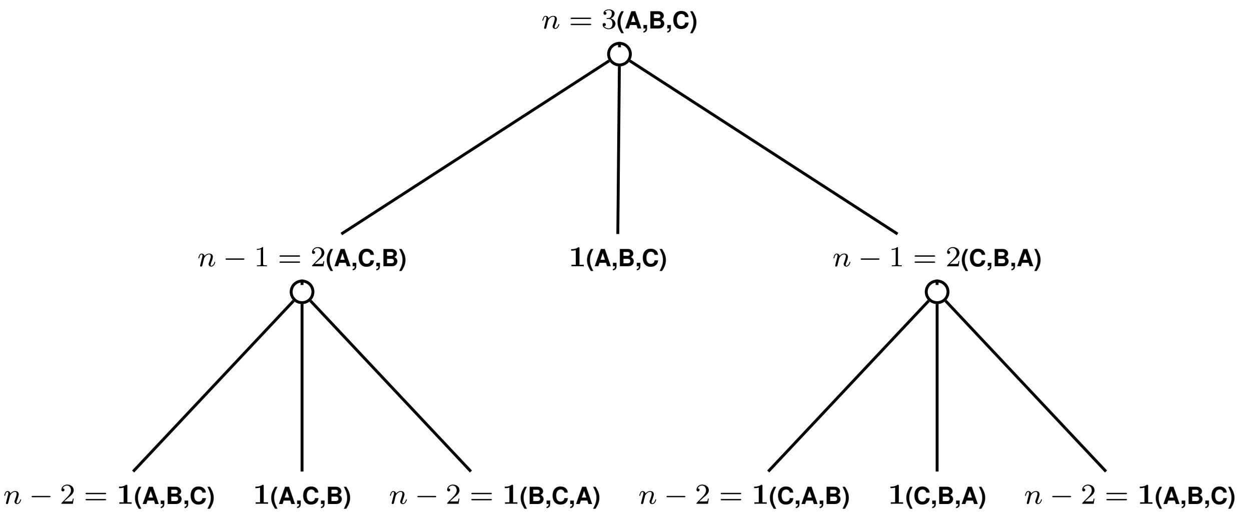







## PŘÍKLAD – HANOISKÉ VĚŽE pokrač.

**schéma celého řešení** pro $n = 3$:



## PŘÍKLAD – HANOISKÉ VĚŽE pokrač.

```
?−op(100,xfx,to), dynamic(hanoi/5).

hanoi(1,A,B,C,[A to B]).
hanoi(N,A,B,C,Moves) :− N>1, N1 is N−1, lemma(hanoi(N1,A,C,B,Ms1)),
    hanoi(N1,C,B,A,Ms2), append(Ms1,[A to B|Ms2],Moves).

lemma(P) :− P,asserta((P :− !)).

?− hanoi(3,a,b,c,M).
    M = [a to b, a to c, b to c, a to b, c to a, c to b, a to b] ;
    No
```





## CESTA MEZI MĚSTY POMOCÍ AND/OR GRAFŮ

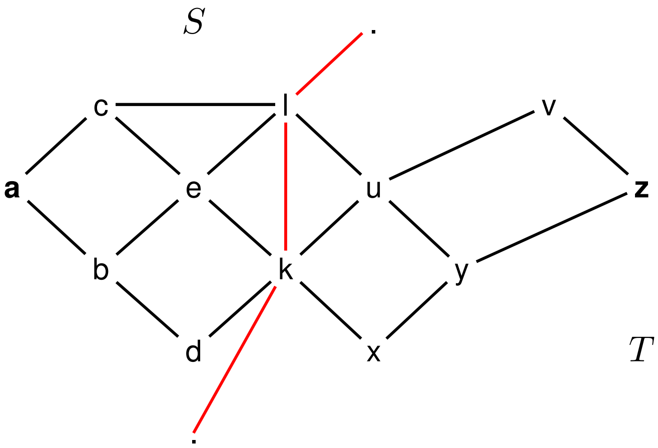
města: **a**, ..., **e** ... ve státě $S$

**l** a **k** ... hraniční přechody

**u**, ..., **z** ... ve státě $T$

hledáme cestu z **a** do **z**:

- ➜ cesta z **a** do hraničního přechodu
- ➜ cesta z hraničního přechodu do **z**



## CESTA MEZI MĚSTY POMOCÍ AND/OR GRAFŮ pokrač.

schéma řešení pomocí rozkladu na podproblémy = **AND/OR graf**

přímý zápis AND/OR grafu v Prologu:

**OR uzel v** s následníky **u1**, **u2**, . . . , **uN**:

```
v :– u1.
v :– u2.
 ...
v :– uN.
```

**AND uzel x** s následníky **y1**, **y2**, . . . , **yM**:

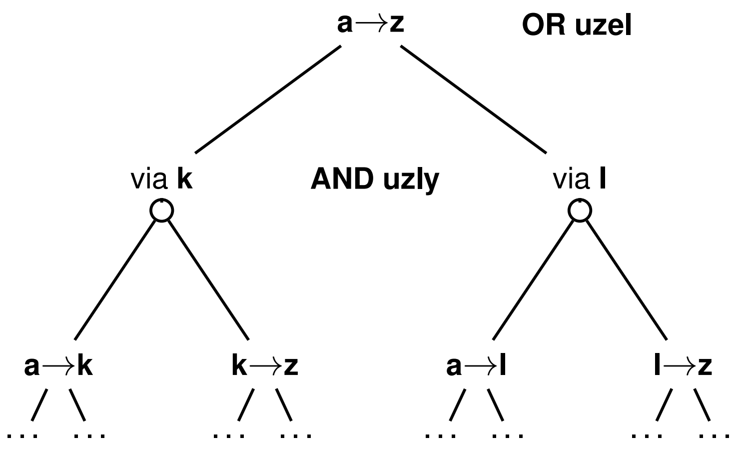
```
x :– y1, y2, ..., yM.
```

**cílový** uzel **g** ($\triangleq$ elementární problém):

```
g.
```

**kořenový** uzel **root**:

```
?– root.
```

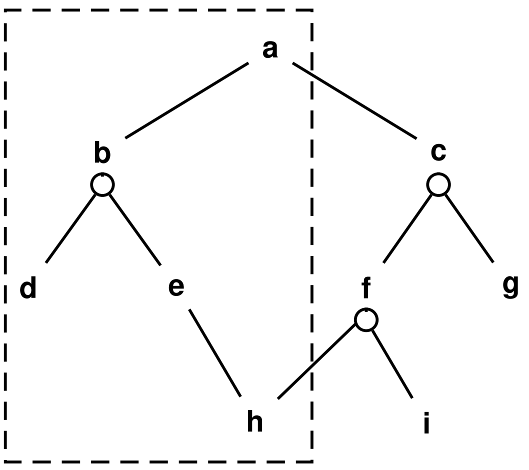



**Celkové řešení** = podgraf AND/OR grafu, který nevynechává žádného následníka AND-uzlu.





## TRIVIÁLNÍ PROHLEDÁVÁNÍ AND/OR GRAFU V PROLOGU




```
a :– b.
a :– c.
b :– d, e.
e :– h.
c :– f, g.
f :– h, i.
d.
g.
h.

?– a.
   Yes
```

## Reprezentace AND/OR grafu

**AND/OR graf** = graf s 2 typy vnitřních uzlů – **AND uzly** a **OR uzly**

- ➜ *AND uzel* jako součást řešení vyžaduje průchod všech svých poduzlů
- ➜ *OR uzel* se chová jako bežný uzel klasického grafu

**Reprezentace AND/OR grafu v Prologu:**

- ➜ zavedeme operátory '**−−−>**' a '**:**'

```
?- op(600, xfx, --->).
?- op(500, xfx, :).
```

**op(+Priorita, +Typ, +Jméno)**

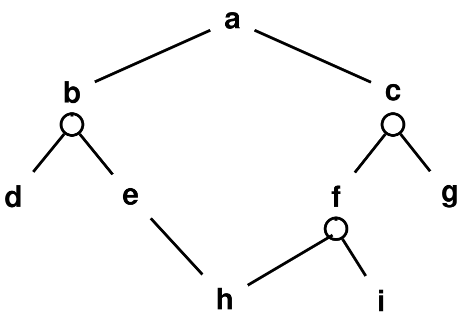
**Priorita** *číslo 0..1200*

**Typ** *jedno z* **xf**, **yf**, **xfx**, **xfy**, **yfx**, **yfy**, **fy** *nebo* **fx**

**Jméno** *funktor nebo symbol*

- ➜ AND/OR graf budeme zapisovat

```
a ---> or:[b, c].
b ---> and:[d, e].
```




```
a ---> or:[b,c].
b ---> and:[d,e].
c ---> and:[f,g].
e ---> or:[h].
f ---> and:[h,i].
goal(d).
goal(g).
goal(h).
```

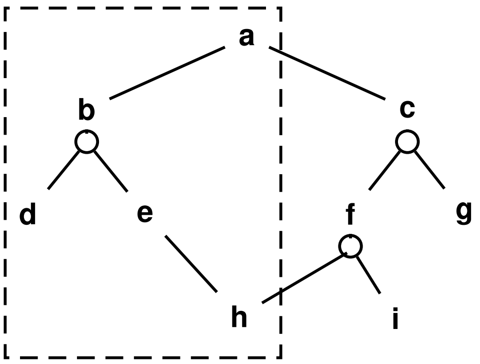




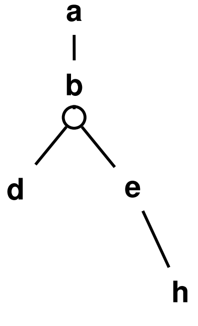
## Strom řešení AND/OR grafu

**strom řešení** $T$ problému $P$ s AND/OR grafem $G$:

- ➜ problém $P$ je **kořen** stromu $T$
- ➜ jestliže $P$ je **OR uzel** grafu $G \Rightarrow$ právě jeden z jeho následníků se svým stromem řešení je v $T$
- ➜ jestliže $P$ je **AND uzel** grafu $G \Rightarrow$ všichni jeho následníci se svými stromy řešení jsou v $T$
- ➜ každý list stromu řešení $T$ je **cílovým uzlem** v $G$




$\longrightarrow$



## Prohledávání AND/OR grafu do hloubky

```
% solve (+Node, – SolutionTree )
solve(Node,Node) :– goal(Node).
solve(Node,Node −−−> Tree) :–
    Node −−−> or:Nodes, member(Node1,Nodes), solve(Node1,Tree).
solve(Node,Node −−−> and:Trees) :–
    Node −−−> and:Nodes, solveall(Nodes,Trees).

% solveall ([ Node1,Node2, ...], [ SolutionTree1 , SolutionTree2 , ...])
solveall ([],[]).
solveall([Node|Nodes],[Tree|Trees]) :– solve(Node,Tree), solveall(Nodes,Trees).

?– solve(a,Tree).
    Tree = a−−−> (b−−−>and:[d, e−−−>h]) ;
    No
```





## Heuristické prohledávání AND/OR grafu

- doplnění reprezentace o **cenu přechodové hrany** (=odhad složitosti podproblému):

```
Uzel −−−> AndOr:[NaslUzel1/Cena1, NaslUzel2/Cena2, ..., NaslUzelN/CenaN].
```

- definujeme **cenu uzlu** jako cenu optimálního řešení jeho podstromu
- pro každý uzel $N$ máme daný odhad jeho ceny:

$$\mathbf{h(N)} = \text{heuristický odhad ceny optimálního podgrafu s kořenem } N$$

- pro každý uzel $N$, jeho následníky $N_1, \ldots, N_b$ a jeho předchůdce $M$ definujeme:

$$\mathbf{F(N)} = \text{cena}(M,N) + \begin{cases} h(N), & \text{pro ještě neexpandovaný uzel } N \\ 0, & \text{pro cílový uzel (elementární problém)} \\ \min_i(F(N_i)), & \text{pro OR-uzel } N \\ \sum_i F(N_i), & \text{pro AND-uzel } N \end{cases}$$

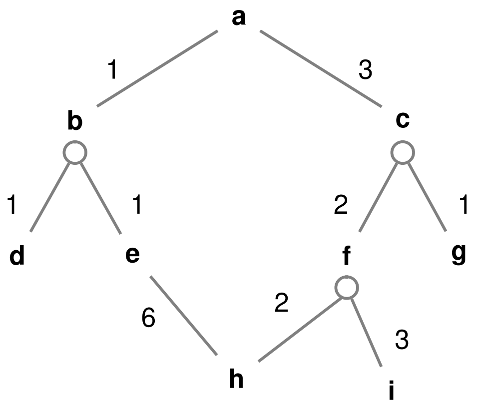
Pro optimální strom řešení $S$ je tedy $F(S)$ právě cena tohoto řešení (=suma $\forall$ hran z $S$).

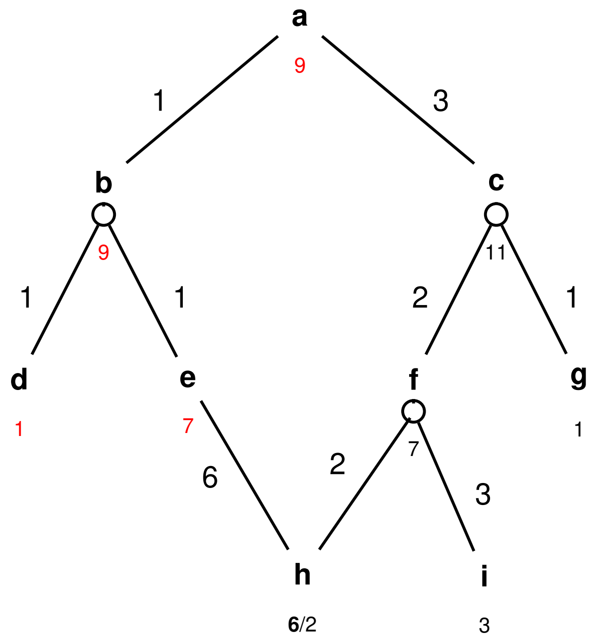
## Heuristické prohledávání AND/OR grafu – příklad

**setříděný** seznam **částečně expandovaných** grafů =

[Nevyřešený$_1$, Nevyřešený$_2$, $\ldots$, Vyřešený$_1$, $\ldots$]

$F_{\text{Nevyřešený}_1} \leq F_{\text{Nevyřešený}_2} \leq \ldots$








## Reprezentace AND/OR grafu při heuristickém prohledávání

**list** AND/OR grafu . . . struktura **leaf(N,F,C)**.

**C** . . . *cena hrany do uzlu* **N**

**F** . . . *příslušná heuristická $F$-hodnota uzlu* **N**

**N** . . . *identifikátor uzlu*

$\mathbf{F} = \mathbf{C} + h(\mathbf{N})$

**OR uzel** AND/OR grafu . . . struktura **tree(N,F,C,or:[T1,T2,T3,...])**.

$\mathbf{F} = \mathbf{C} + \min_i \mathbf{F}_i$

**AND uzel** AND/OR grafu . . . struktura **tree(N,F,C,and:[T1,T2,T3,...])**.

$\mathbf{F} = \mathbf{C} + \sum_i \mathbf{F}_i$

**vyřešený list** AND/OR grafu . . . struktura **solvedleaf(N,F)**.

$\mathbf{F} = \mathbf{C}$

**vyřešený OR uzel** AND/OR grafu . . . struktura **solvedtree(N,F,T)**.

$\mathbf{F} = \mathbf{C} + \mathbf{F}_1$

**vyřešený AND uzel** AND/OR grafu . . . struktura **solvedtree(N,F,and:[T1,T2,...])**.

$\mathbf{F} = \mathbf{C} + \sum_i \mathbf{F}_i$

## Heuristické prohledávání AND/OR grafu

```
andor(Node,SolutionTree) :− biggest(Bound),expand(leaf(Node,0,0),Bound,SolutionTree,yes).

% 1: limit Bound překročen (ve všech dalších klauzulích platí F =< Bound)
expand(Tree,Bound,Tree,no) :− f(Tree,F),F>Bound,!.
% 2: nalezen cíl
expand(leaf(Node,F,C),_,solvedleaf(Node,F),yes) :− goal(Node),!.
% 3: expanze listu
expand(leaf(Node,F,C),Bound,NewTree,Solved) :− expandnode(Node,C,Tree1),!,
    (expand(Tree1,Bound,NewTree,Solved);Solved=never,!).
% 4: expanze stromu
expand(tree(Node,F,C,SubTrees),Bound,NewTree,Solved) :− Bound1 is Bound−C,
    expandlist(SubTrees,Bound1,NewSubs,Solved1),
    continue(Solved1,Node,C,NewSubs,Bound,NewTree,Solved).

expandlist(Trees,Bound,NewTrees,Solved) :−
    selecttree(Trees,Tree,OtherTrees,Bound,Bound1),
    expand(Tree,Bound1,NewTree,Solved1),
    combine(OtherTrees,NewTree,Solved1,NewTrees,Solved).

continue(yes,Node,C,SubTrees,_,solvedtree(Node,F,SubTrees),yes) :−
    bestf(SubTrees,H), F is C+H,!.
continue(never,_,_,_,_,_,never) :− !.
continue(no,Node,C,SubTrees,Bound,NewTree,Solved) :− bestf(SubTrees,H),
    F is C+H,!,expand(tree(Node,F,C,SubTrees),Bound,NewTree,Solved).
```

**expand(+Tree, +Bound, -NewTree, ?Solved)** *expanduje* **Tree** *po* **Bound**. *Výsledek je* **NewTree** *se stavem* **Solved**

**expandlist** *expanduje všechny grafy v seznamu* **Trees** *se závorou* **Bound**. *Výsledek je v seznamu* **NewTrees** *a celkový stav v* **Solved**

**continue** *určuje, jak pokračovat po expanzi seznamu grafů*





## Heuristické prohledávání AND/OR grafu pokrač.

```
combine(or:_,Tree,yes,Tree,yes) :− !.
combine(or:Trees,Tree,no,or:NewTrees,no) :− insert(Tree,Trees,NewTrees),!.
combine(or:[],_,never,_,never) :− !.
combine(or:Trees,_,never,or:Trees,no) :− !.
combine(and:Trees,Tree,yes,and:[Tree|Trees],yes) :− allsolved(Trees),!.
combine(and:_,_,never,_,never) :− !.
combine(and:Trees,Tree,YesNo,and:NewTrees,no) :− insert(Tree,Trees,NewTrees),!.

expandnode(Node,C,tree(Node,F,C,Op:SubTrees)) :− Node −−−> Op:Successors,
    expandsucc(Successors,SubTrees),bestf(Op:SubTrees,H),F is C+H.
expandsucc([],[]).
expandsucc([Node/C|NodesCosts],Trees) :− h(Node,H),F is C+H,expandsucc(NodesCosts,Trees1),
    insert(leaf(Node,F,C),Trees1,Trees).

allsolved([]).
allsolved([Tree|Trees]) :− solved(Tree),allsolved(Trees).

solved(solvedtree(_,_,_)).
solved(solvedleaf(_,_)).
```

**combine(OtherTrees,NewTree, Solved1,NewTrees,Solved)** *kombinuje výsledky expanze stromu a seznamu stromů*

**expandnode** *převede uzel z* **Node—>AndOr:S** *do* **tree(Node,F,C,SS)**

**allsolved** *zkontroluje, jestli všechny stromy v seznamu jsou vyřešené*

## HEURISTICKÉ PROHLEDÁVÁNÍ AND/OR GRAFU pokrač.

```
f(Tree,F) :- arg(2,Tree,F),!.

insert(T,[],[T]) :- !.
insert(T,[T1|Ts],[T,T1|Ts]) :- solved(T1),!.
insert(T,[T1|Ts],[T1|Ts1]) :- solved(T),insert(T,Ts,Ts1),!.
insert(T,[T1|Ts],[T,T1|Ts]) :- f(T,F),f(T1,F1),F=<F1,!.
insert(T,[T1|Ts],[T1|Ts1]) :- insert(T,Ts,Ts1).

% první následovník v OR-uzlu je nejlepší
bestf(or:[Tree|_],F) :- f(Tree,F),!.
bestf(and:[],0) :- !.
bestf(and:[Tree1|Trees],F) :- f(Tree1,F1),bestf(and:Trees,F2),F is F1+F2,!.
bestf(Tree,F) :- f(Tree,F).

selecttree(Op:[Tree],Tree,Op:[],Bound,Bound) :- !.   % The only candidate
selecttree(Op:[Tree|Trees],Tree,Op:Trees,Bound,Bound1) :- bestf(Op:Trees,F),
     (Op=or,!,min(Bound,F,Bound1);Op=and,Bound1 is Bound-F).

min(A,B,A) :- A<B,!.
min(A,B,B).
```

**insert** *vkládá strom do seznamu stromů se zachováním třídění*

**bestf** *vyhledá uloženou* $F$*-hodnotu AND/OR stromu/uzlu*

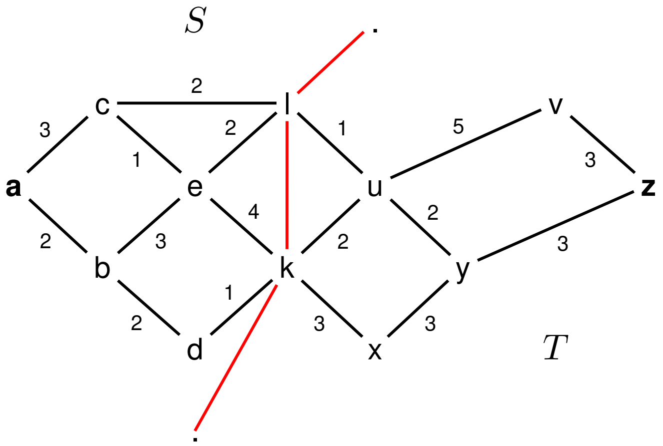
**selecttree( +Trees, -BestTree, -OtherTrees, +Bound, -Bound1)** *vybere* **BestTree** *z* **Trees**, *zbytek je v* **OtherTrees**. **Bound** *je závora pro* **Trees**, **Bound1** *pro* **BestTree**





## CESTA MEZI MĚSTY HEURISTICKÝM AND/OR HLEDÁNÍM

- ➜ cesta mezi **Mesto1** a **Mesto2** – predikát **move(Mesto1,Mesto2,Vzdal).**
- ➜ klíčové postavení města **Mesto3** – predikát **key(Mesto1–Mesto2,Mesto3).**




```
move(a,b,2). move(a,c,3). move(b,e,3).
move(b,d,2). move(c,e,1). move(c,l,2).
move(e,k,4). move(e,l,2). move(k,u,2).
move(k,x,3). move(u,v,5). move(x,y,3).
move(y,z,3). move(v,z,3). move(l,u,1).
move(d,k,1). move(u,y,2).

stateS(a). stateS(b). stateS(c). stateS(d). stateS(e).
stateT(u). stateT(v). stateT(x). stateT(y). stateT(z).
border(l). border(k).

key(M1-M2,M3) :- stateS(M1), stateT(M2), border(M3).

city(X) :- (stateS(X);stateT(X);border(X)).
```

## CESTA MEZI MĚSTY HEURISTICKÝM AND/OR HLEDÁNÍM pokrač.

vlastní hledání cesty:

1. **Y1**, **Y2**,... klíčové body mezi městy **A** a **Z**. Hledej jednu z cest:
   - ➜ cestu z **A** do **Z** přes **Y1**
   - ➜ cestu z **A** do **Z** přes **Y2**
   - ➜ ...
2. Není-li mezi městy **A** a **Z** klíčové město ⇒ hledej souseda **Y** města **A** takového, že existuje cesta z **Y** do **Z**.





## CESTA MEZI MĚSTY HEURISTICKÝM AND/OR HLEDÁNÍM pokrač.

**Konstrukce příslušného AND/OR grafu:**

```
?- op(560,xfx,via).    % operátory X-Z a X-Z via Y

a-z ---> or:[a-z via k/0,a-z via l/0]
a-v ---> or:[a-v via k/0,a-v via l/0]
 ...
a-l ---> or:[c-l/3,b-l/2]
b-l ---> or:[e-l/3,d-l/2]
 ...
a-z via l  ---> and:[a-l/0,l-z/0]
a-v via l  ---> and:[a-l/0,l-v/0]
 ...
goal(a-a). goal(b-b).  ...
```

```
X-Z ---> or:Problemlist :- city(X),city(Z), bagof((X-Z via Y)/0, key(X-Z,Y), Problemlist),!.
X-Z ---> or:Problemlist :- city(X),city(Z), bagof((Y-Z)/D, move(X,Y,D), Problemlist).
X-Z via Y ---> and:[(X-Y)/0,(Y-Z)/0]:- city(X),city(Z),key(X-Z,Y).
goal(X-X).
/* h(Node,H).    ...    heuristická   funkce  */
```

Když $\forall \mathbf{n} : \mathbf{h(n)} \leq \mathbf{h^*(n)},$ kde $h^*$ je minimální cena řešení uzlu $n$ ⇒ najdeme **vždy optimální řešení**