Problémy s omezujícími podmínkami

Aleš Horák

E-mail: `hales@fi.muni.cz`

`http://nlp.fi.muni.cz/uui/`

Obsah:

Průběžná písemná práce

- ➜ délka pro vypracování: **25 minut**
- ➜ **nejsou** povoleny **žádné** materiály
- ➜ u odpovědí typu A, B, C, D, E:
  - pouze jedna odpověď je **nejsprávnější** ☺
  - za tuto nejsprávnější je **8 bodů**
  - za žádnou odpověď je **0 bodů**
  - za libovolnou jinou, případně za nejasné označení odpovědi je **mínus 3 body**
- ➜ celkové hodnocení **0 až 32 bodů** (celkové záporné hodnocení se bere jako 0)

Problémy s omezujícími podmínkami

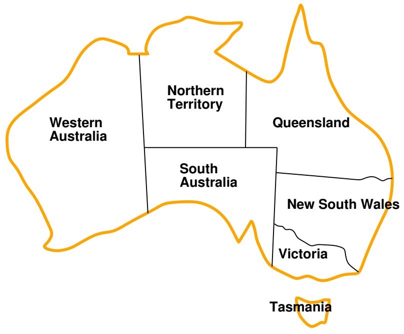
- ➜ **standardní problém** řešený prohledáváním stavového prostoru $\longrightarrow$ **stav** je "*černá skříňka*" – pouze **cílová podmínka** a **přechodová funkce**
- ➜ **problém s omezujícími podmínkami**, *Constraint Satisfaction Problem*, CSP:
  - n-tice **proměnných** $X_1, X_2, \ldots, X_n$ s hodnotami z **domén** $D_1, D_2, \ldots, D_n$, $D_i \neq \emptyset$
  - množina **omezení** $C_1, C_2, \ldots, C_m$ nad proměnnými X_i
  - **stav** = **přiřazení hodnot** proměnným $\{X_i = v_i, X_j = v_j, \ldots\}$

    konzistentní přiřazení neporušuje žádné z omezení C_i

    úplné přiřazení zmiňuje každou proměnnou X_i
  - **řešení** = **úplné konzistentní přiřazení hodnot** proměnným

    někdy je ještě potřeba maximalizovat *cílovou funkci*
- ➜ výhody:
  - jednoduchý **formální jazyk** pro specifikaci problému
  - může využívat **obecné heuristiky** (ne jen specifické pro daný problém)

Příklad – obarvení mapy



Proměnné WA, NT, Q, NSW, V, SA, T

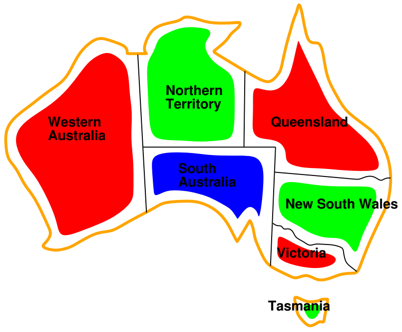
Domény $D_i = \{$červená, zelená, modrá$\}$

Omezení – sousedící oblasti musí mít různou barvu

tj. pro každé dvě sousedící: $WA \neq NT$ nebo

$(WA, NT) \in \{$(červená, zelená), (červená, modrá), (zelená, modrá), $\ldots\}$

PŘÍKLAD – OBARVENÍ MAPY pokrač.

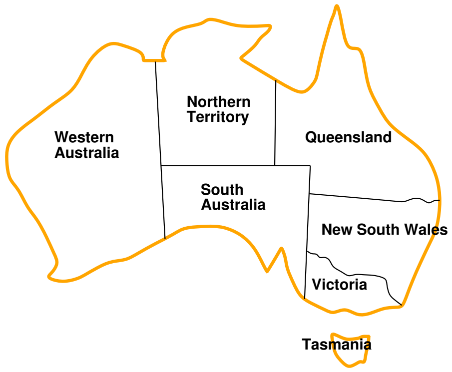


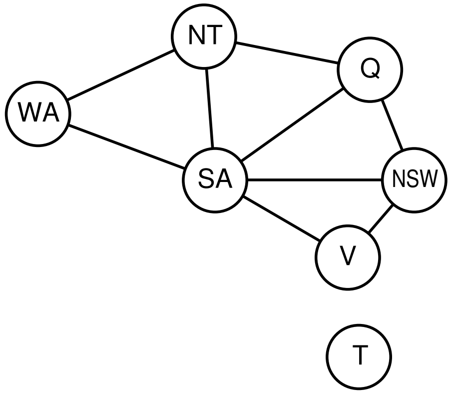
Řešení – konzistentní přiřazení všem proměnným:

$\{WA =$ červená, $NT =$ zelená, $Q =$ červená, $NSW =$ zelená, $V =$ červená, $SA =$ modrá, $T =$ zelená$\}$

GRAF OMEZENÍ

Pro **binární** omezení: **uzly** = proměnné, **hrany** = reprezentují jednotlivá omezení





Algoritmy pro řešení CSP využívají této grafové reprezentace omezení

VARIANTY CSP PODLE HODNOT PROMĚNNÝCH

- **diskrétní hodnoty proměnných** – každá proměnná má jednu konkrétní hodnotu
  - **konečné domény**
    - např. Booleovské (včetně NP-úplných problémů splnitelnosti)
    - výčtové
  - **nekonečné domény** – čísla, řetězce, ...
    - např. rozvrh prací – proměnné = počáteční/koncový den každého úkolu
    - vyžaduje **jazyk omezení**, např. $StartJob_1 + 5 \leq StartJob_3$
    - číselné *lineární* problémy jsou řešitelné, *nelineární* obecné řešení nemají
- **spojité hodnoty proměnných**
  - časté u reálných problémů
  - např. počáteční/koncový čas měření na Hubbleově teleskopu (závisí na astronomických, precedenčních a technických omezeních)
  - *lineární omezení* řešené pomocí **Lineárního programování** (omezení = lineární nerovnice tvořící konvexní oblast) $\longrightarrow$ jsou řešitelné v polynomiálním čase

VARIANTY OMEZENÍ

- **unární** omezení zahrnuje jedinou proměnnou
  např. $SA \neq$ zelená
- **binární** omezení zahrnují dvě proměnné
  např. $SA \neq WA$
- omezení **vyššího řádu** zahrnují 3 a více proměnných
  např. kryptoaritmetické omezení na sloupce u algebrogramu
- **preferenční** omezení (soft constraints), např. 'červená je lepší než zelená'
  možno reprezentovat pomocí **ceny přiřazení** u konkrétní hodnoty a konkrétní proměnné $\longrightarrow$ hledá se **optimalizované řešení** vzhledem k ceně

CLP – CONSTRAINT LOGIC PROGRAMMING

```
% SICStus Prolog
:- use_module(library(clpfd)).    % clpq , clpr

?- X in 1..5, Y in 2..8, X+Y #= T.
   X in 1..5,
   Y in 2..8,
   T in 3..13
   Yes

?- X in 1..5, Y in 2..8, X+Y #= T, labeling ([],[X,Y,T]).
   T = 3,
   X = 1,
   Y = 2
   Yes
```

aritmetická omezení ...
- ➜ *rel. operátory* #=, #\=, #<, #=<, #>, #>=
- ➜ sum(Variables,RelOp,Suma)

výroková omezení ...
- \# *negace*, #/\ *konjunkce*,
- #\/ *disjunkce*, #<=> *ekvivalence*

domain(+Variables, +Min, +Max)

?X in +Min..+Max

?X in +Range ...
- **A in (1..3) \/(8..15) \/(5..9) \/100.**

fd_dom(?Var,?Range) *zjištění domény proměnné*

fd_set(?Var,?FDSet), ?X in_set +FDSet *příslušnost k dané konečné doméně*

CLP – CONSTRAINT LOGIC PROGRAMMING pokrač.

```
?- X #< 4, domain([X,Y],0,5).
   X in 0..3, Y in 0..5 ?
   Yes

?- X #< 4, indomain(X).
   Instantiation error

?- X #> 3, X #< 6, indomain(X).
   X = 4 ? ;
   X = 5 ? ;
   No

?- X in 4..sup, X #\= 17, fd_set(X,F).
   F = [[4|16],[18| sup]],
   X in(4..16)\/(18..sup) ?
   Yes
```


PŘÍKLAD – ALGEBROGRAM

```
   S E N D
+  M O R E
----------
 M O N E Y
```

Proměnné $\{S, E, N, D, M, O, R, Y\}$

Domény $D_i = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Omezení
- $S > 0, M > 0$
- $S \neq E \neq N \neq D \neq M \neq O \neq R \neq Y$
- $D + E = R + 10 * X_1,$
  $N + R + X_1 = E + 10 * X_2, \ldots$

```
moremoney([S,E,N,D,M,O,R,Y], Type) :- domain([S,E,N,D,M,O,R,Y],0,9),
                                      S #> 0, M #> 0,
                                      all_different ([S,E,N,D,M,O,R,Y]),
                                      sum(S,E,N,D,M,O,R,Y),
                                      labeling(Type, [S,E,N,D,M,O,R,Y]).

sum(S,E,N,D,M,O,R,Y):-            1000*S + 100*E + 10*N + D
                       +          1000*M + 100*O + 10*R + E
                       #= 10000*M + 1000*O + 100*N + 10*E + Y.

?-moremoney([S,E,N,D,M,O,R,Y],[]). % Type=[] ... Type = [ leftmost , step , up, all ]
D = 7, E = 5, M = 1, N = 6, O = 0, R = 8, S = 9, Y = 2 ?
Yes
```


INKREMENTÁLNÍ FORMULACE CSP

CSP je možné převést na standardní prohledávání takto:

- ❏ **stav** – přiřazení hodnot proměnným
- ❏ **počáteční stav** – prázdné přiřazení $\{\}$
- ❏ **přechodová funkce** – přiřazení hodnoty libovolné dosud nenastavené proměnné tak, aby výsledné přiřazení bylo konzistentní
- ❏ **cílová podmínka** – aktuální přiřazení je úplné
- ❏ **cena cesty** – konstantní (např. 1) pro každý krok

1. platí beze změny pro **všechny** CSP!
2. prohledávací strom dosahuje hloubky n (počet proměnných) a řešení se nachází v této hloubce $(d = n) \Rightarrow$ je vhodné použít **prohledávání do hloubky**

Prohledávání s navracením

- přiřazení proměnným jsou **komutativní**
  tj. $[1.\ WA =$ červená, $\quad 2.\ NT =$ zelená$]$ je totéž jako $[1.\ NT =$ zelená, $\quad 2.\ WA =$ červená$]$
- stačí uvažovat pouze **přiřazení jediné proměnné** v každém kroku $\Rightarrow$ počet listů d^n
- prohledávání do hloubky pro CSP – tzv. **prohledávání s navracením** (*backtracking search*)
- prohledávání s navracením je základní neinformovaná strategie pro řešení problémů s omezujícími podmínkami
- schopný vyřešit např. problém n-dam pro $n \approx 25$

Příklad – problém N dam

```
queens(N,L,Type):- length(L,N),
                   domain(L,1,N),        % 1. definice proměnných a domén
                   constr_all(L),        % 2. definice omezení
                   labeling(Type,L).     % 3. hledání řešení

constr_all ([]).
constr_all ([X|Xs]):- constr_between(X,Xs,1), constr_all(Xs).

constr_between(_,[],_).
constr_between(X,[Y|Ys],N):-
    no_threat(X,Y,N),
    N1 is N+1,
    constr_between(X,Ys,N1).

no_threat(X,Y,J):- X #\= Y, X+J #\= Y, X-J #\= Y.

?- queens(4, L, [ff ]).
    L = [2,4,1,3] ? ;
    L = [3,1,4,2] ? ;
    No
```


Ovlivnění efektivity prohledávání s navracením

Obecné metody ovlivnění efektivity:

- Která proměnná dostane hodnotu v tomto kroku?
- V jakém pořadí zkoušet přiřazení hodnot konkrétní proměnné?
- Můžeme předčasně detekovat nutný neúspěch v dalších krocích?

používané strategie:

- **nejomezenější proměnná** $\longrightarrow$ vybrat proměnnou s nejméně možnými hodnotami
- **nejvíce omezující proměnná** $\longrightarrow$ vybrat proměnnou s nejvíce omezeními na zbývající proměnné
- **nejméně omezující hodnota** $\longrightarrow$ pro danou proměnnou – hodnota, která zruší nejmíň hodnot zbývajících proměnných
- **dopředná kontrola** $\longrightarrow$ udržovat seznam možných hodnot pro zbývající proměnné
- **propagace omezení** $\longrightarrow$ navíc kontrolovat možné nekonzistence mezi zbývajícími proměnnými

Ovlivnění efektivity v CLP

V Prologu (CLP) možnosti ovlivnění efektivity – **labeling(Typ, ...)**:

```
?- constraints(Vars,Cost),
   labeling([ff ,bisect,down,minimize(Cost)],Vars).
```

- **výběr proměnné** – **leftmost**, **min**, **max**, **ff**, ...
- **dělení domény** – **step**, **enum**, **bisect**, **value(Enum)**
- **prohledávání domény** – **up**, **down**
- **která řešení** – **all**, **minimize(X)**, **maximize(X)**, ...