

Heuristiky, best-first search, A* search

Aleš Horák

E-mail: `hales@fi.muni.cz`

`http://nlp.fi.muni.cz/uui/`

Obsah:

- Informované prohledávání stavového prostoru
- Heuristické hledání nejlepší cesty
- Příklad – řešení posunovačky
- Příklad – rozvrh práce procesorů

INFORMOVANÉ PROHLEDÁVÁNÍ STAVOVÉHO PROSTORU

Neinformované prohledávání:

- DFS, BFS a varianty
- nemá (téměř) žádné informace o pozici cíle – [slepé prohledávání](#)
- zná pouze:
 - počáteční/cílový stav
 - přechodovou funkci

INFORMOVANÉ PROHLEDÁVÁNÍ STAVOVÉHO PROSTORU

Neinformované prohledávání:

- DFS, BFS a varianty
- nemá (téměř) žádné informace o pozici cíle – **slepé prohledávání**
- zná pouze:
 - počáteční/cílový stav
 - přechodovou funkci

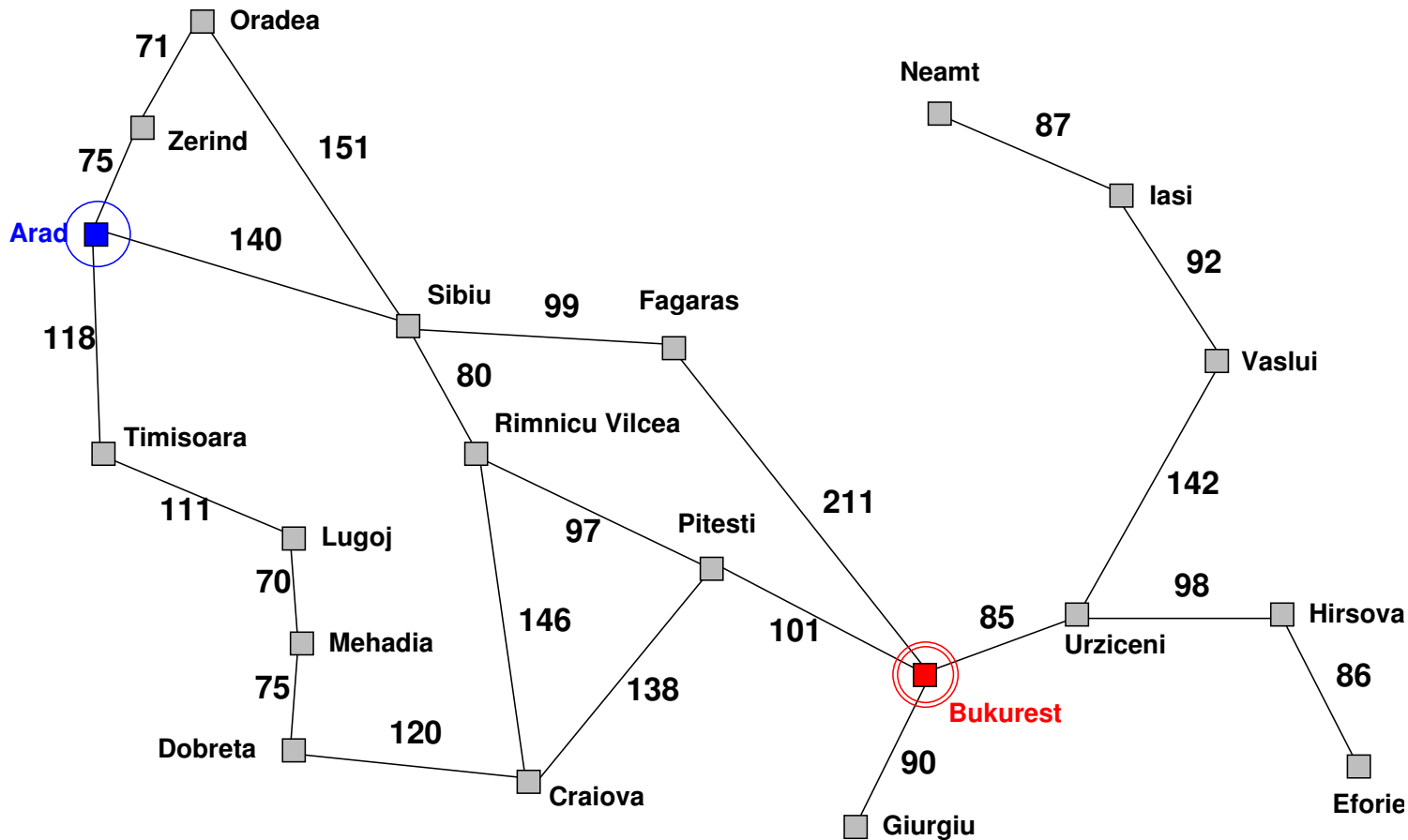
Informované prohledávání:

má navíc informaci o (odhadu) blízkosti stavu k cílovému stavu – **heuristická funkce** (heuristika)

HEURISTICKÉ HLEDÁNÍ NEJLEPŠÍ CESTY

- Best-first Search
- použití **ohodnocovací funkce** $f(n)$ pro každý uzel – výpočet **přínosu** daného uzlu
- udržujeme seznam uzlů uspořádaný (vzestupně) vzhledem k $f(n)$
- použití **heuristické funkce** $h(n)$ pro každý uzel – **odhad vzdálenosti** daného uzlu od cíle
- čím *menší* $h(n)$, tím blíže k cíli, $h(\text{Goal}) = 0$.
- nejjednodušší varianta – **hladové heuristické hledání**, *Greedy best-first search*
 $f(n) = h(n)$

SCHÉMA RUMUNSKÝCH MĚST



Arad	366
Bukurest	0
Craiova	160
Dobreta	242
Eforie	161
Fagaras	178
Giurgiu	77
Hirsova	151
Iasi	226
Lugoj	244
Mehadia	241
Neamt	234
Oradea	380
Pitesti	98
Rimnicu Vilcea	193
Sibiu	253
Timisoara	329
Urziceni	80
Vilcea	199
Zerind	374



HLADOVÉ HEURISTICKÉ HLEDÁNÍ – PŘÍKLAD

Hledání cesty z města *Arad* do města *Bukurest*

ohodnocovací funkce $f(n) = h(n) = h_{\text{vzd_Buk}}(n)$, přímá vzdálenost z n do Bukuresti



HLADOVÉ HEURISTICKÉ HLEDÁNÍ – PŘÍKLAD

Hledání cesty z města *Arad* do města *Bukurest*

ohodnocovací funkce $f(n) = h(n) = h_{\text{vzd_Buk}}(n)$, přímá vzdálenost z n do Bukuresti

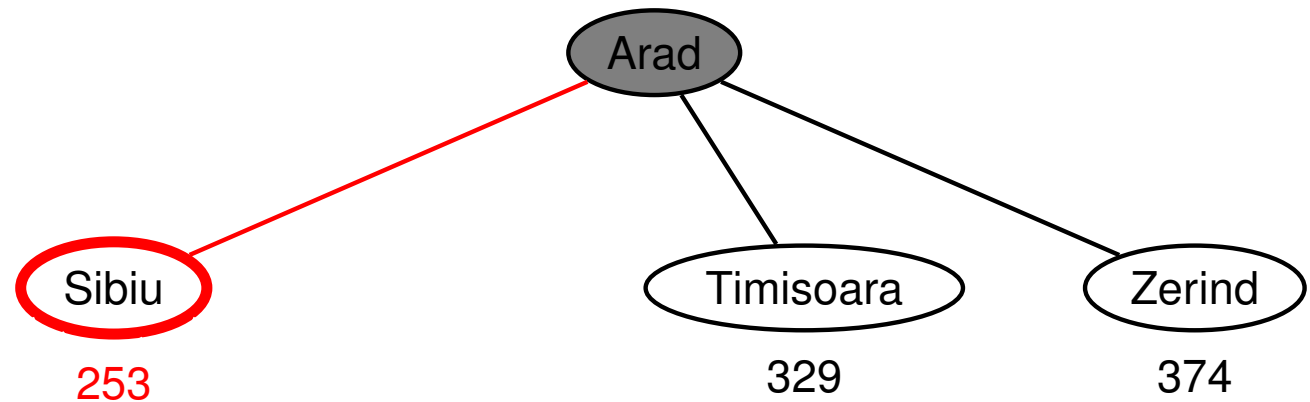
Arad
366



HLADOVÉ HEURISTICKÉ HLEDÁNÍ – PŘÍKLAD

Hledání cesty z města *Arad* do města *Bukurest*

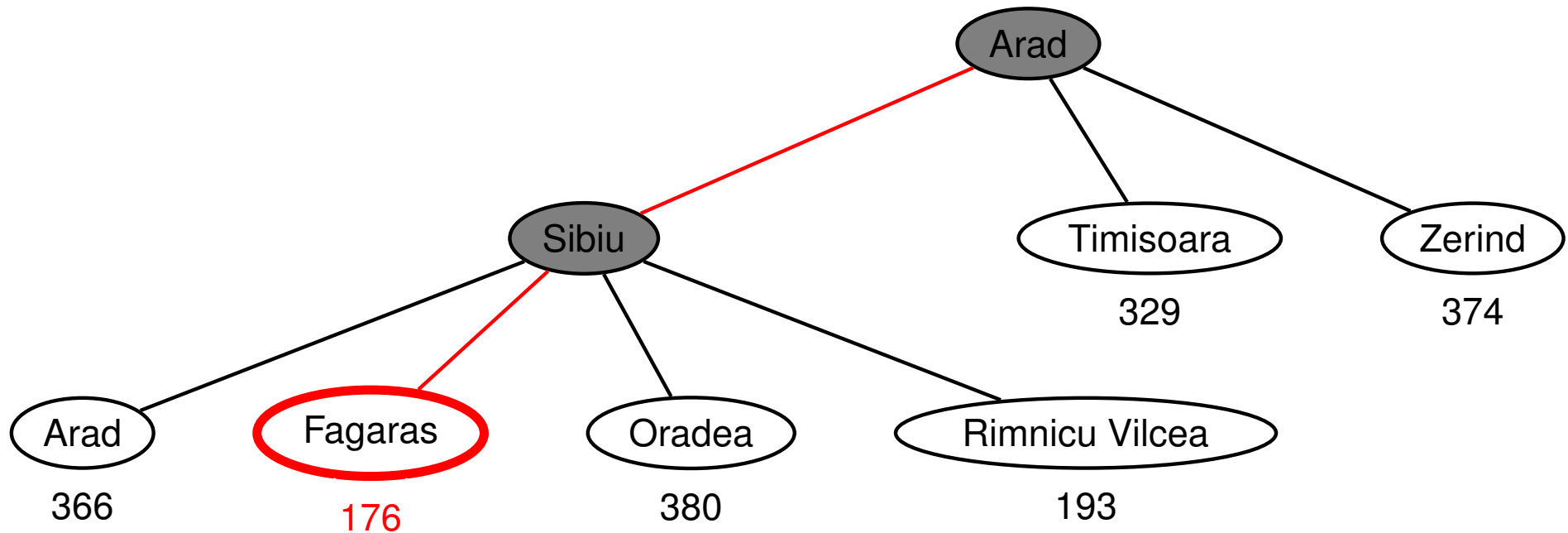
ohodnocovací funkce $f(n) = h(n) = h_{\text{vzd_Buk}}(n)$, přímá vzdálenost z n do Bukuresti



HLADOVÉ HEURISTICKÉ HLEDÁNÍ – PŘÍKLAD

Hledání cesty z města *Arad* do města *Bukurest*

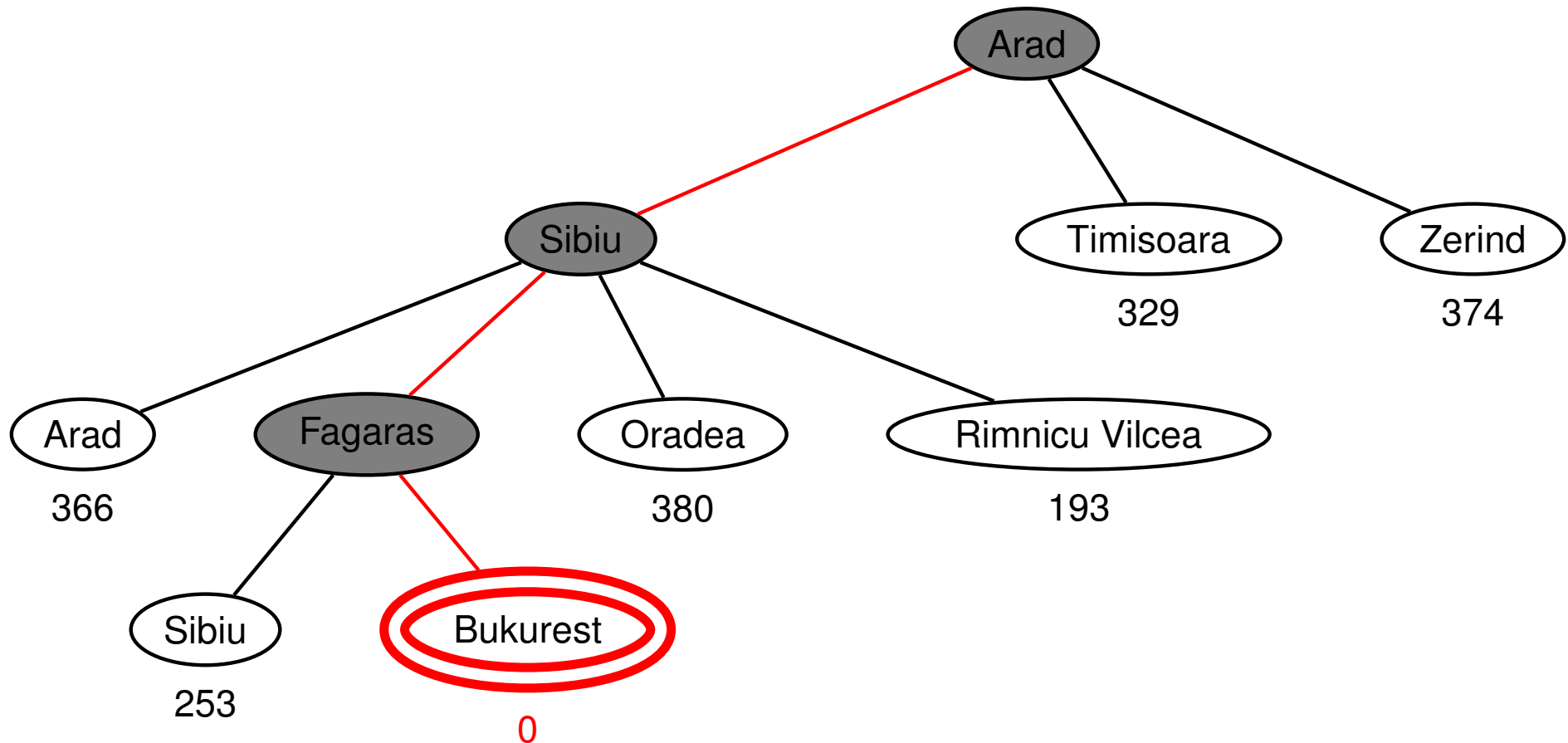
ohodnocovací funkce $f(n) = h(n) = h_{\text{vzd_Buk}}(n)$, přímá vzdálenost z n do Bukuresti



HLADOVÉ HEURISTICKÉ HLEDÁNÍ – PŘÍKLAD

Hledání cesty z města *Arad* do města *Bukurest*

ohodnocovací funkce $f(n) = h(n) = h_{\text{vzd_Buk}}(n)$, přímá vzdálenost z n do Bukuresti



HLADOVÉ HEURISTICKÉ HLEDÁNÍ – VLASTNOSTI

- expanduje vždy uzel, který **se zdá** nejbližší k cíli
- cesta nalezená v příkladu ($g(\text{Arad} \rightarrow \text{Sibiu} \rightarrow \text{Fagaras} \rightarrow \text{Bukurest}) = 450$) je sice úspěšná, ale **není optimální** ($g(\text{Arad} \rightarrow \text{Sibiu} \rightarrow \text{Rimnicu Vilcea} \rightarrow \text{Pitesti} \rightarrow \text{Bukurest}) = 418$)
- *úplnost*
 - optimálnost*
 - časová složitost*
 - prostorová složitost*

HLADOVÉ HEURISTICKÉ HLEDÁNÍ – VLASTNOSTI

- expanduje vždy uzel, který **se zdá** nejbližší k cíli
- cesta nalezená v příkladu ($g(\text{Arad} \rightarrow \text{Sibiu} \rightarrow \text{Fagaras} \rightarrow \text{Bukurest}) = 450$) je sice úspěšná, ale **není optimální** ($g(\text{Arad} \rightarrow \text{Sibiu} \rightarrow \text{Rimnicu Vilcea} \rightarrow \text{Pitesti} \rightarrow \text{Bukurest}) = 418$)
- *úplnost* obecně **není** úplný (nekonečný prostor, cykly)
- optimálnost*
- časová složitost*
- prostorová složitost*

HLADOVÉ HEURISTICKÉ HLEDÁNÍ – VLASTNOSTI

- expanduje vždy uzel, který **se zdá** nejbližší k cíli
- cesta nalezená v příkladu ($g(\text{Arad} \rightarrow \text{Sibiu} \rightarrow \text{Fagaras} \rightarrow \text{Bukurest}) = 450$) je sice úspěšná, ale **není optimální** ($g(\text{Arad} \rightarrow \text{Sibiu} \rightarrow \text{Rimnicu Vilcea} \rightarrow \text{Pitesti} \rightarrow \text{Bukurest}) = 418$)
- *úplnost* obecně **není** úplný (nekonečný prostor, cykly)
- optimálnost* **není** optimální
- časová složitost*
- prostorová složitost*

HLADOVÉ HEURISTICKÉ HLEDÁNÍ – VLASTNOSTI

- expanduje vždy uzel, který **se zdá** nejbližší k cíli
- cesta nalezená v příkladu ($g(\text{Arad} \rightarrow \text{Sibiu} \rightarrow \text{Fagaras} \rightarrow \text{Bukurest}) = 450$) je sice úspěšná, ale **není optimální** ($g(\text{Arad} \rightarrow \text{Sibiu} \rightarrow \text{Rimnicu Vilcea} \rightarrow \text{Pitesti} \rightarrow \text{Bukurest}) = 418$)
- *úplnost* obecně **není** úplný (nekonečný prostor, cykly)
- optimálnost* **není** optimální
- časová složitost* $O(b^m)$, hodně záleží na h
- prostorová složitost*

HLADOVÉ HEURISTICKÉ HLEDÁNÍ – VLASTNOSTI

- expanduje vždy uzel, který **se zdá** nejbližší k cíli
- cesta nalezená v příkladu ($g(\text{Arad} \rightarrow \text{Sibiu} \rightarrow \text{Fagaras} \rightarrow \text{Bukurest}) = 450$) je sice úspěšná, ale **není optimální** ($g(\text{Arad} \rightarrow \text{Sibiu} \rightarrow \text{Rimnicu Vilcea} \rightarrow \text{Pitesti} \rightarrow \text{Bukurest}) = 418$)
- *úplnost* obecně **není** úplný (nekonečný prostor, cykly)
- optimálnost* **není** optimální
- časová složitost* $O(b^m)$, hodně záleží na h
- prostorová složitost* $O(b^m)$, každý uzel v paměti

HLEDÁNÍ NEJLEPŠÍ CESTY – ALGORITMUS A*

→ některé zdroje označují tuto variantu jako Best-first Search

→ ohodnocovací funkce – kombinace $g(n)$ a $h(n)$:

$$f(n) = g(n) + h(n)$$

$g(n)$ je cena cesty do n

$h(n)$ je odhad ceny cesty z n do cíle

$f(n)$ je odhad ceny nejlevnější cesty, která vede přes n

→ A* algoritmus vyžaduje tzv. přípustnou (*admissible*) heuristiku:

$$0 \leq h(n) \leq h^*(n), \text{ kde } h^*(n) \text{ je skutečná cena cesty z } n \text{ do cíle}$$

tj. odhad se volí vždycky kratší nebo roven ceně libovolné možné cesty do cíle

Např. přímá vzdálenost $h_{\text{vzd_Buk}}$ nikdy není delší než (jakákoliv) cesta

HEURISTICKÉ HLEDÁNÍ A* – PŘÍKLAD

Hledání cesty z města *Arad* do města *Bukurest*

ohodnocovací funkce $f(n) = g(n) + h(n) = g(n) + h_{\text{vzd_Buk}}(n)$, přímá vzdálenost z n do Bukuresti



HEURISTICKÉ HLEDÁNÍ A* – PŘÍKLAD

Hledání cesty z města *Arad* do města *Bukurest*

ohodnocovací funkce $f(n) = g(n) + h(n) = g(n) + h_{\text{vzd_Buk}}(n)$, přímá vzdálenost z n do Bukuresti

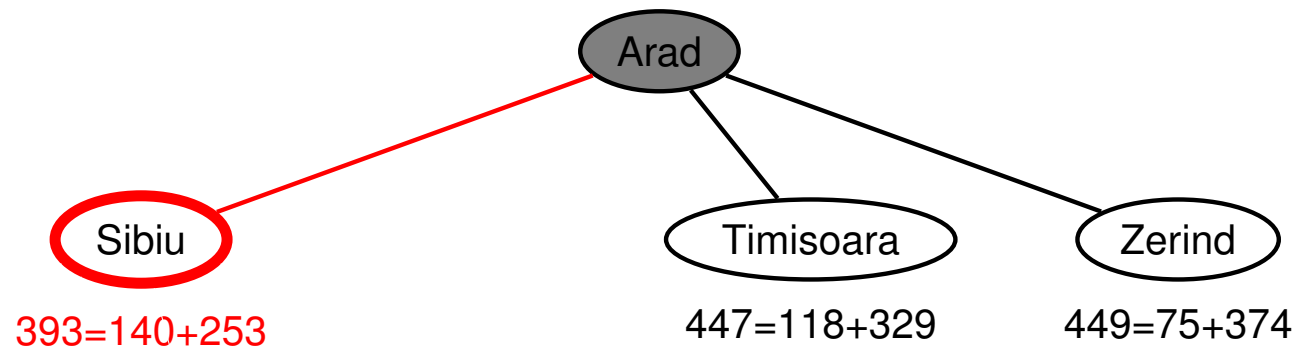
Arad
366=0+366



HEURISTICKÉ HLEDÁNÍ A* – PŘÍKLAD

Hledání cesty z města *Arad* do města *Bukurest*

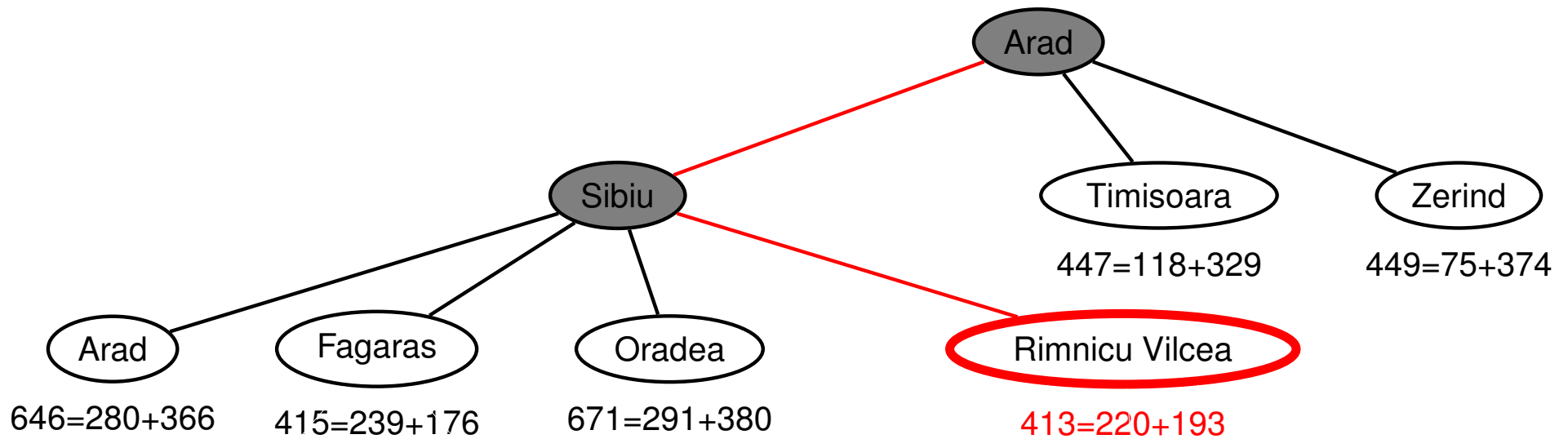
ohodnocovací funkce $f(n) = g(n) + h(n) = g(n) + h_{\text{vzd_Buk}}(n)$, přímá vzdálenost z n do Bukuresti



HEURISTICKÉ HLEDÁNÍ A* – PŘÍKLAD

Hledání cesty z města *Arad* do města *Bukurest*

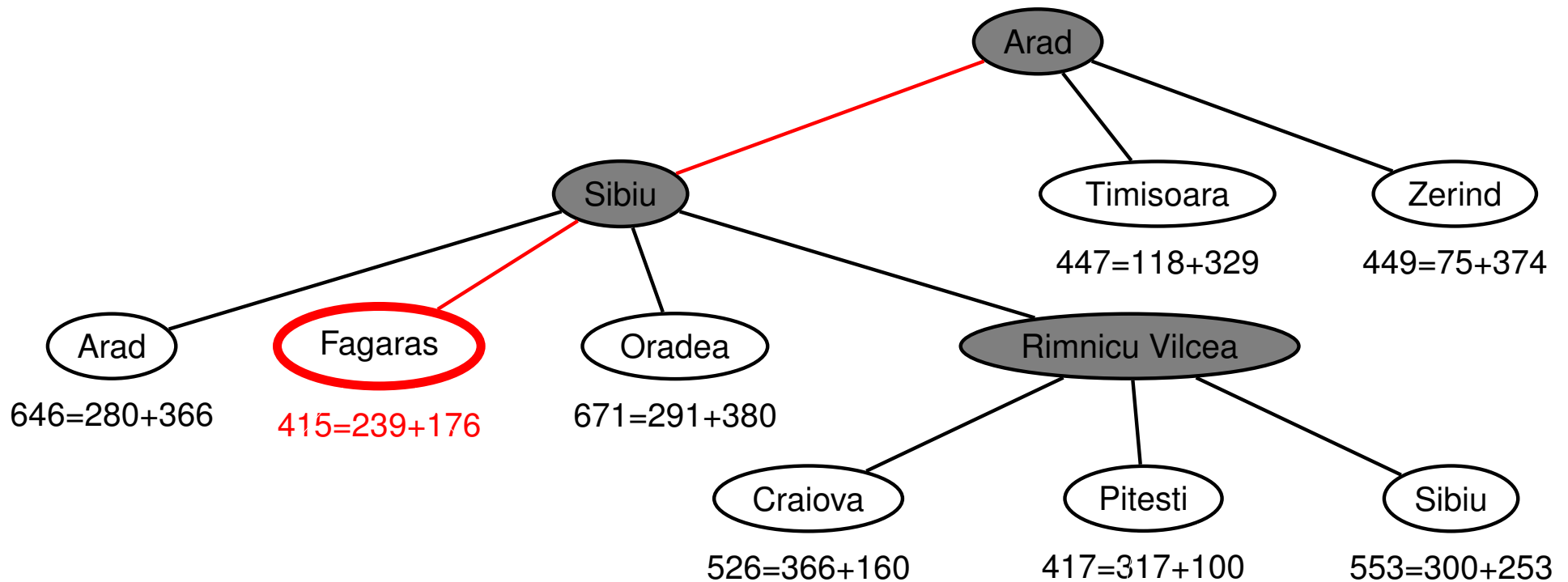
ohodnocovací funkce $f(n) = g(n) + h(n) = g(n) + h_{\text{vzd_Buk}}(n)$, přímá vzdálenost z n do Bukuresti



HEURISTICKÉ HLEDÁNÍ A* – PŘÍKLAD

Hledání cesty z města *Arad* do města *Bukurest*

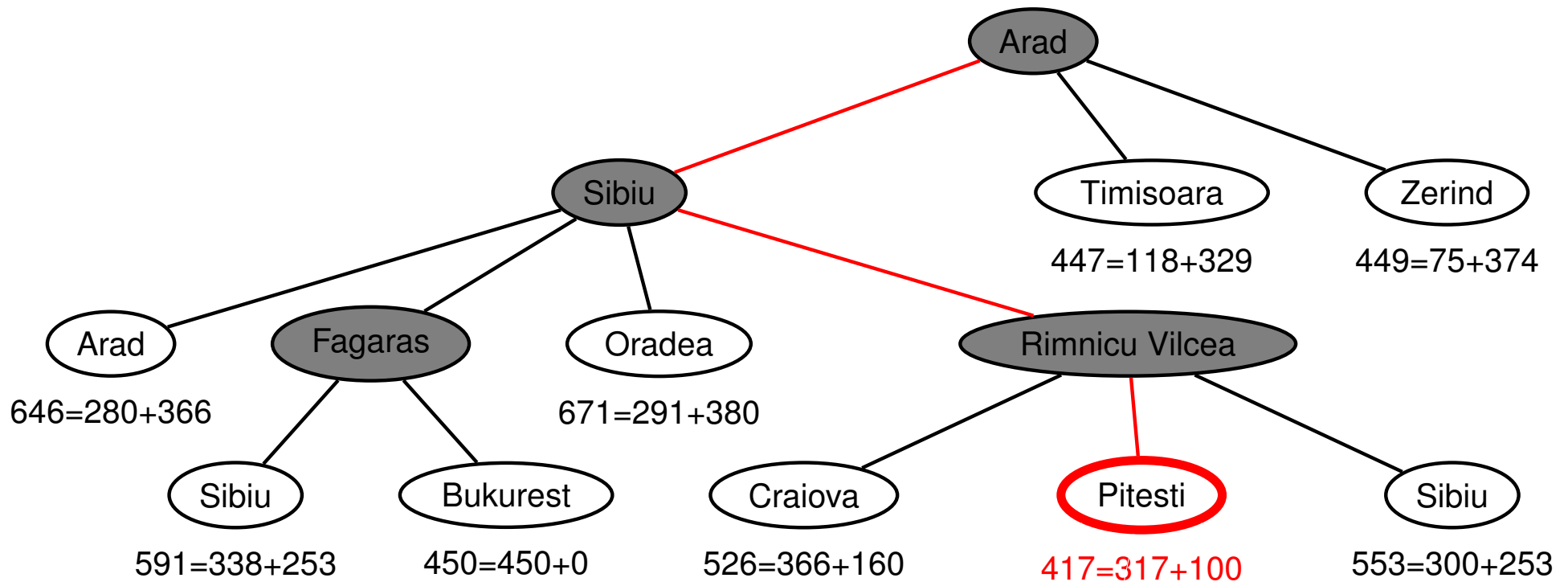
ohodnocovací funkce $f(n) = g(n) + h(n) = g(n) + h_{\text{vzd_Buk}}(n)$, přímá vzdálenost z n do Bukuresti



HEURISTICKÉ HLEDÁNÍ A* – PŘÍKLAD

Hledání cesty z města *Arad* do města *Bukurest*

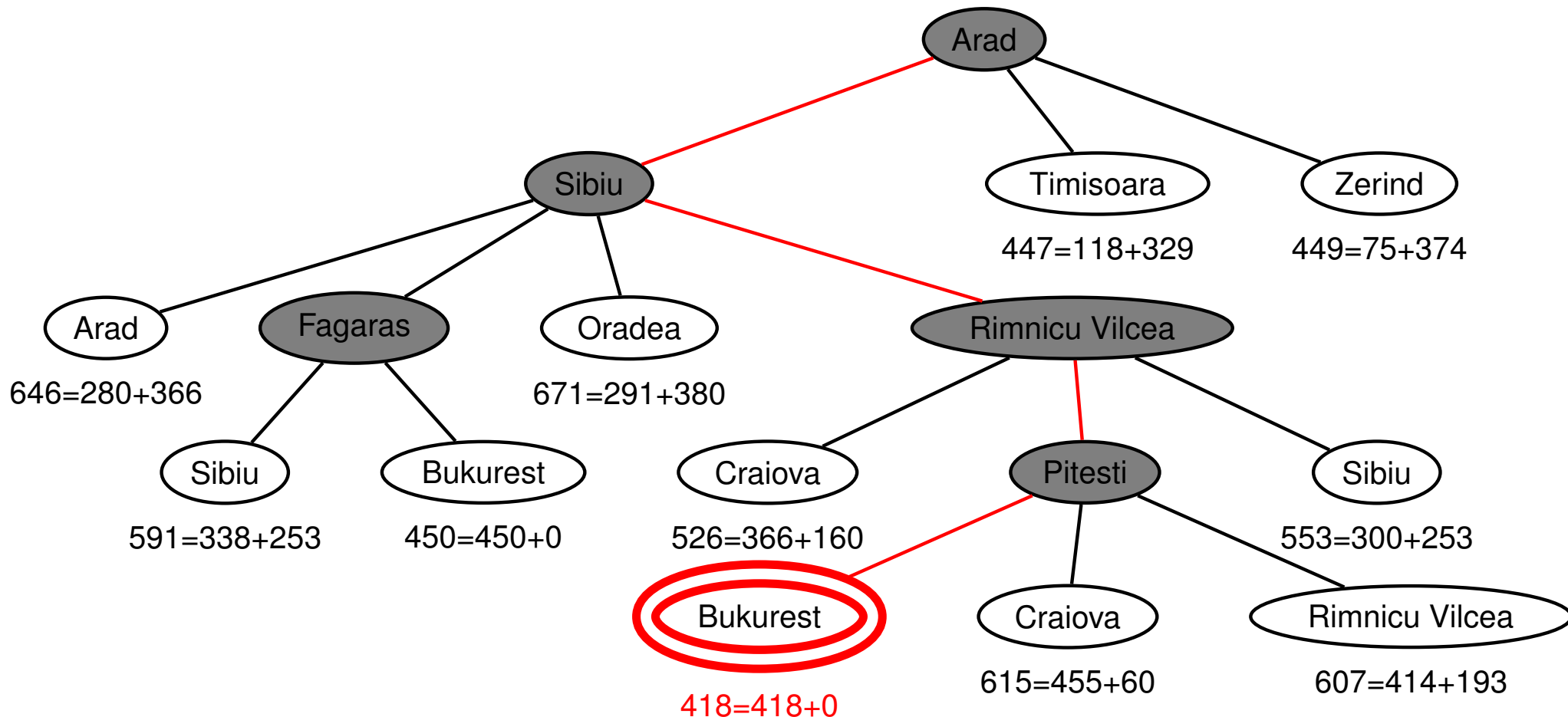
ohodnocovací funkce $f(n) = g(n) + h(n) = g(n) + h_{\text{vzd_Buk}}(n)$, přímá vzdálenost z n do Bukuresti



HEURISTICKÉ HLEDÁNÍ A* – PŘÍKLAD

Hledání cesty z města *Arad* do města *Bukurest*

ohodnocovací funkce $f(n) = g(n) + h(n) = g(n) + h_{\text{vzd_Buk}}(n)$, přímá vzdálenost z n do Bukuresti



HLEDÁNÍ NEJLEPŠÍ CESTY – ALGORITMUS A*

reprezentace uzlů:

→ **l(N,F/G)** ... listový uzel **N**, $\mathbf{F} = f(N) = \mathbf{G} + h(N)$, $\mathbf{G} = g(N)$

→ **t(N,F/G,Subs)** ... podstrom s kořenovým uzlem **N**, **Subs** seznam podstromů seřazených podle f ,
 $\mathbf{G} = g(N)$ a $\mathbf{F} = f$ -hodnota nejnadějnějšího následníka uzlu N

HLEDÁNÍ NEJLEPŠÍ CESTY – ALGORITMUS A*

reprezentace uzlů:

→ **I(N,F/G)** ... listový uzel **N**, $F = f(N) = G + h(N)$, $G = g(N)$

→ **t(N,F/G,Subs)** ... podstrom s kořenovým uzlem **N**, **Subs** seznam podstromů seřazených podle f , $G = g(N)$ a $F = f$ -hodnota nejnadějnějšího následníka uzlu N

```
bestsearch(Start,Solution) :- biggest(Big), expand([], I(Start,0/0), Big,_,yes,Solution).
```

```
expand(P,I(N,-),_,_,yes,[N|P]) :- goal(N).
```

```
% list – generuj následníky a expanduj je v rámci Bound
```

```
expand(P,I(N,F/G),Bound,Tree1,Solved,Sol) :- F=<Bound,
    (bagof(M/C,(move(N,M,C),not(member(M,P))),Succ),!,succlist(G,Succ,Ts),
    bestf(Ts,F1), expand(P,t(N,F1/G,Ts),Bound,Tree1,Solved,Sol);Solved=never).
```

```
% nelist, f<Bound – expanduj nejslibnější podstrom, pokračuj dle výsledku
```

```
expand(P,t(N,F/G,[T|Ts]),Bound,Tree1,Solved,Sol) :- F=<Bound, bestf(Ts,BF),
    min(Bound,BF,Bound1),expand([N|P],T,Bound1,T1,Solved1,Sol),
    continue(P,t(N,F/G,[T1|Ts]),Bound,Tree1,Solved1,Solved,Sol).
```

```
expand(_ ,t(_,-,[]),_,_,never,-) :- !.
```

```
expand(_ ,Tree,Bound,Tree,no,-) :- f(Tree,F), F>Bound.
```

```
...
```

HLEDÁNÍ NEJLEPŠÍ CESTY – ALGORITMUS A*

reprezentace uzlů:

→ **I(N,F/G)** ... listový uzel **N**, $F = f(N) = G + h(N)$, $G = g(N)$

→ **t(N,F/G,Subs)** ... podstrom s kořenovým uzlem **N**, **Subs** seznam podstromů seřazených podle f ,
 $G = g(N)$ a $F = f$ -hodnota nejnadějnějšího následníka uzlu N

biggest(-Big) horní závora
 pro cenu nejlepší cesty

```
bestsearch(Start,Solution) :- biggest(Big), expand([], I(Start,0/0), Big,_,yes,Solution).
```

```
expand(P,I(N,-),_,_,yes,[N|P]) :- goal(N).
```

% list – generuj následníky a expanduj je v rámci Bound

```
expand(P,I(N,F/G),Bound,Tree1,Solved,Sol) :- F=<Bound,
    (bagof(M/C,(move(N,M,C),not(member(M,P))),Succ),!,succlist(G,Succ,Ts),
    bestf(Ts,F1), expand(P,t(N,F1/G,Ts),Bound,Tree1,Solved,Sol);Solved=never).
```

% nelist, f<Bound – expanduj nejslibnější podstrom, pokračuj dle výsledku

```
expand(P,t(N,F/G,[T|Ts]),Bound,Tree1,Solved,Sol) :- F=<Bound, bestf(Ts,BF),
    min(Bound,BF,Bound1),expand([N|P],T,Bound1,T1,Solved1,Sol),
    continue(P,t(N,F/G,[T1|Ts]),Bound,Tree1,Solved1,Solved,Sol).
```

```
expand(_ ,t(_,-,[]),_,_,never,_) :- !.
```

```
expand(_ ,Tree,Bound,Tree,no,_) :- f(Tree,F), F>Bound.
```

...

HLEDÁNÍ NEJLEPŠÍ CESTY – ALGORITMUS A*

reprezentace uzlů:

→ **I(N,F/G)** ... listový uzel **N**, $F = f(N) = G + h(N)$, $G = g(N)$

→ **t(N,F/G,Subs)** ... podstrom s kořenovým uzlem **N**, **Subs** seznam podstromů seřazených podle f , $G = g(N)$ a $F = f$ -hodnota nejnadějnějšího následníka uzlu N

biggest(-Big) horní závora
pro cenu nejlepší cesty

```
bestsearch(Start,Solution) :- biggest(Big), expand([], I(Start,0/0), Big,_,yes,Solution).
```

```
expand(P,I(N,_),_,_,yes,[N|P]) :- goal(N).
```

% list – generuj následníky a expanduj je v rámci Bound

```
expand(P,I(N,F/G),Bound,Tree1,Solved,Sol) :- F=<Bound,
    (bagof(M/C,(move(N,M,C),not(member(M,P))),Succ),!,succlist(G,Succ,Ts),
    bestf(Ts,F1), expand(P,t(N,F1/G,Ts),Bound,Tree1,Solved,Sol);Solved=never).
```

% nelist, f<Bound – expanduj nejslibnější podstrom, pokračuj dle výsledku

```
expand(P,t(N,F/G,[T|Ts]),Bound,Tree1,Solved,Sol) :- F=<Bound, bestf(Ts,BF),
    min(Bound,BF,Bound1),expand([N|P],T,Bound1,T1,Solved1,Sol),
    continue(P,t(N,F/G,[T1|Ts]),Bound,Tree1,Solved1,Solved,Sol).
```

```
expand(_ ,t(_ ,_ ,[]), _ ,_ ,never,_ ) :- !.
```

```
expand(_ ,Tree,Bound,Tree,no,_ ) :- f(Tree,F), F>Bound.
```

...

expand(+Path,+Tr,+Bnd,-Tr1,?Solved,-Sol)
Path – cesta mezi kořenem a Tr
Tr – prohledávaný podstrom
Bnd – f -limita pro expandování Tr
Tr1 – Tr expandovaný až po Bnd
Solved – yes, no, never
Sol – cesta z kořene do cílového uzlu

HLEDÁNÍ NEJLEPŠÍ CESTY – ALGORITMUS A* pokrač.

```

continue(-, -, -, -, yes, yes, Sol).
continue(P, t(N, F/G, [T1|Ts]), Bound, Tree1, Solved1, Solved, Sol) :-
    (Solved=no, insert(T1, Ts, NTs); Solved=never, NTs=Ts),
    bestf(NTs, F1), expand(P, t(N, F1/G, NTs), Bound, Tree1, Solved, Sol).

```

```

succlist(-, [], []).
succlist(G0, [N/C|NCs], Ts) :- G is G0+C, h(N, H), F is G+H,
    succlist(G0, NCs, Ts1), insert(l(N, F/G), Ts1, Ts).

```

```

insert(T, Ts, [T|Ts]) :- f(T, F), bestf(Ts, F1), F=<F1,!.
insert(T, [T1|Ts], [T1|Ts1]) :- insert(T, Ts, Ts1).

```

```

f(l(-, F/-), F).
f(t(-, F/-, -), F).

```

```

bestf([T|_], F) :- f(T, F).
bestf([], Big) :- biggest(Big).

```

```

min(X, Y, X) :- X=<Y,!.
min(X, Y, Y).

```

HLEDÁNÍ NEJLEPŠÍ CESTY – ALGORITMUS A* pokrač.

```

continue(-, -, -, -, yes, yes, Sol).
continue(P, t(N, F/G, [T1|Ts]), Bound, Tree1, Solved1, Solved, Sol) :-
    (Solved=no, insert(T1, Ts, NTs); Solved=never, NTs=Ts),
    bestf(NTs, F1), expand(P, t(N, F1/G, NTs), Bound, Tree1, Solved, Sol).
    
```

continue(+Path, +Tree,
+Bound, -NewTree,
+SubtrSolved,
?TreeSolved, -Solution)
*volba způsobu pokračování
podle výsledků expand*

```

succlist(-, [], []).
succlist(G0, [N/C|NCs], Ts) :- G is G0+C, h(N, H), F is G+H,
    succlist(G0, NCs, Ts1), insert(l(N, F/G), Ts1, Ts).
    
```

```

insert(T, Ts, [T|Ts]) :- f(T, F), bestf(Ts, F1), F=<F1,!.
insert(T, [T1|Ts], [T1|Ts1]) :- insert(T, Ts, Ts1).
    
```

```

f(l(-, F/-), F).
f(t(-, F/-, -), F).
    
```

```

bestf([T|_], F) :- f(T, F).
bestf([], Big) :- biggest(Big).
    
```

```

min(X, Y, X) :- X=<Y,!.
min(X, Y, Y).
    
```

HLEDÁNÍ NEJLEPŠÍ CESTY – ALGORITMUS A* pokrač.

```

continue(-, -, -, -, yes, yes, Sol).
continue(P, t(N, F/G, [T1|Ts]), Bound, Tree1, Solved1, Solved, Sol) :-
    (Solved=no, insert(T1, Ts, NTs); Solved=never, NTs=Ts),
    bestf(NTs, F1), expand(P, t(N, F1/G, NTs), Bound, Tree1, Solved, Sol).
    
```

**continue(+Path, +Tree,
 +Bound, -NewTree,
 +SubtrSolved,
 ?TreeSolved, -Solution)**
*volba způsobu pokračování
 podle výsledků expand*

```

succlist(-, [], []).
succlist(G0, [N/C|NCs], Ts) :- G is G0+C, h(N, H), F is G+H,
    succlist(G0, NCs, Ts1), insert(l(N, F/G), Ts1, Ts).
    
```

**succlist(+G0, [+Node1/+Cost1, ...],
 [l(-BestNode, -BestF/-G), ...])**
seřídění seznamu listů podle f-hodnot

```

insert(T, Ts, [T|Ts]) :- f(T, F), bestf(Ts, F1), F=<F1,!.
insert(T, [T1|Ts], [T1|Ts1]) :- insert(T, Ts, Ts1).
    
```

```

f(l(-, F/-), F).
f(t(-, F/-, -), F).
    
```

```

bestf([T|_], F) :- f(T, F).
bestf([], Big) :- biggest(Big).
    
```

```

min(X, Y, X) :- X=<Y,!.
min(X, Y, Y).
    
```

HLEDÁNÍ NEJLEPŠÍ CESTY – ALGORITMUS A* pokrač.

```

continue(-, -, -, -, yes, yes, Sol).
continue(P, t(N, F/G, [T1|Ts]), Bound, Tree1, Solved1, Solved, Sol) :-
    (Solved=no, insert(T1, Ts, NTs); Solved=never, NTs=Ts),
    bestf(NTs, F1), expand(P, t(N, F1/G, NTs), Bound, Tree1, Solved, Sol).
    
```

**continue(+Path, +Tree,
+Bound, -NewTree,
+SubtrSolved,
?TreeSolved, -Solution)**
*volba způsobu pokračování
podle výsledků expand*

```

succlist(-, [], []).
succlist(G0, [N/C|NCs], Ts) :- G is G0+C, h(N, H), F is G+H,
    succlist(G0, NCs, Ts1), insert(l(N, F/G), Ts1, Ts).
    
```

**succlist(+G0, [+Node1/+Cost1, ...],
[l(-BestNode,-BestF/-G), ...])**
seřídění seznamu listů podle f-hodnot

```

insert(T, Ts, [T|Ts]) :- f(T, F), bestf(Ts, F1), F=<F1,!.
insert(T, [T1|Ts], [T1|Ts1]) :- insert(T, Ts, Ts1).
    
```

vloží T do seznamu stromů Ts podle f

```

f(l(-, F/-), F).
f(t(-, F/-, -), F).
    
```

```

bestf([T|_], F) :- f(T, F).
bestf([], Big) :- biggest(Big).
    
```

```

min(X, Y, X) :- X=<Y,!.
min(X, Y, Y).
    
```

HLEDÁNÍ NEJLEPŠÍ CESTY – ALGORITMUS A* pokrač.

```

continue(-, -, -, -, yes, yes, Sol).
continue(P, t(N, F/G, [T1|Ts]), Bound, Tree1, Solved1, Solved, Sol) :-
    (Solved=no, insert(T1, Ts, NTs); Solved=never, NTs=Ts),
    bestf(NTs, F1), expand(P, t(N, F1/G, NTs), Bound, Tree1, Solved, Sol).
    
```

continue(+Path, +Tree, +Bound, -NewTree, +SubtrSolved, ?TreeSolved, -Solution)
volba způsobu pokračování podle výsledků expand

```

succlist(-, [], []).
succlist(G0, [N/C|NCs], Ts) :- G is G0+C, h(N, H), F is G+H,
    succlist(G0, NCs, Ts1), insert(l(N, F/G), Ts1, Ts).
    
```

succlist(+G0, [+Node1/+Cost1, ...], [l(-BestNode, -BestF/-G), ...])
seřídění seznamu listů podle f-hodnot

```

insert(T, Ts, [T|Ts]) :- f(T, F), bestf(Ts, F1), F=<F1,!.
insert(T, [T1|Ts], [T1|Ts1]) :- insert(T, Ts, Ts1).
    
```

vloží T do seznamu stromů Ts podle f

```

f(l(-, F/-), F).
f(t(-, F/-, -), F).
    
```

"vytáhne" F ze struktury

```

bestf([T|_], F) :- f(T, F).
bestf([], Big) :- biggest(Big).
    
```

```

min(X, Y, X) :- X=<Y,!.
min(X, Y, Y).
    
```


HLEDÁNÍ NEJLEPŠÍ CESTY – ALGORITMUS A* pokrač.

```

continue(-, -, -, -, yes, yes, Sol).
continue(P, t(N, F/G, [T1|Ts]), Bound, Tree1, Solved1, Solved, Sol) :-
    (Solved=no, insert(T1, Ts, NTs); Solved=never, NTs=Ts),
    bestf(NTs, F1), expand(P, t(N, F1/G, NTs), Bound, Tree1, Solved, Sol).
    
```

continue(+Path, +Tree, +Bound, -NewTree, +SubtrSolved, ?TreeSolved, -Solution)
volba způsobu pokračování podle výsledků expand

```

succlist(-, [], []).
succlist(G0, [N/C|NCs], Ts) :- G is G0+C, h(N, H), F is G+H,
    succlist(G0, NCs, Ts1), insert(l(N, F/G), Ts1, Ts).
    
```

succlist(+G0, [+Node1/+Cost1, ...], [l(-BestNode, -BestF/-G), ...])
seřídění seznamu listů podle f-hodnot

```

insert(T, Ts, [T|Ts]) :- f(T, F), bestf(Ts, F1), F=<F1,!.
insert(T, [T1|Ts], [T1|Ts1]) :- insert(T, Ts, Ts1).
    
```

vloží T do seznamu stromů Ts podle f

```

f(l(-, F/-), F).
f(t(-, F/-, -), F).
    
```

"vytáhne" F ze struktury

```

bestf([T|_], F) :- f(T, F).
bestf([], Big) :- biggest(Big).
    
```

nejlepší f-hodnota ze seznamu stromů

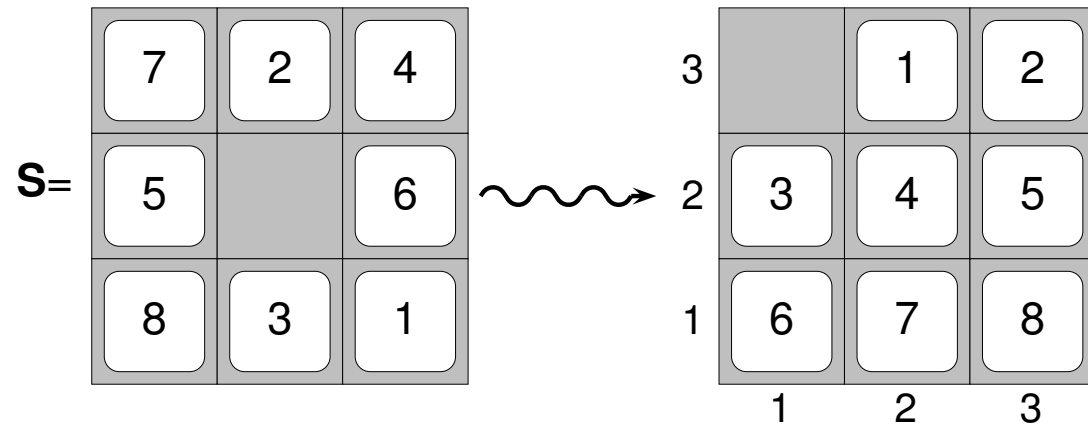
```

min(X, Y, X) :- X=<Y,!.
min(X, Y, Y).
    
```

PŘÍKLAD – ŘEŠENÍ POSUNOVAČKY

konfigurace = seznam dvojic **X/Y** (sloupec/řádek) = [pozice_{díry}, pozice_{kámen č.1}, ...]

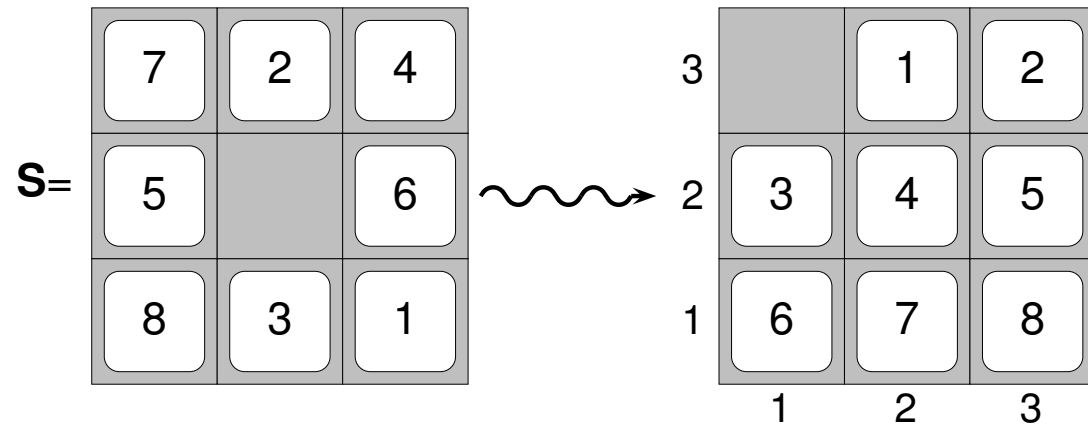
goal ([1/3, 2/3, 3/3, 1/2, 2/2,
3/2, 1/1, 2/1, 3/1]).



PŘÍKLAD – ŘEŠENÍ POSUNOVAČKY

konfigurace = seznam dvojic **X/Y** (sloupec/řádek) = [pozice_{díry}, pozice_{kámen č.1}, ...]

goal ([1/3, 2/3, 3/3, 1/2, 2/2,
3/2, 1/1, 2/1, 3/1]).



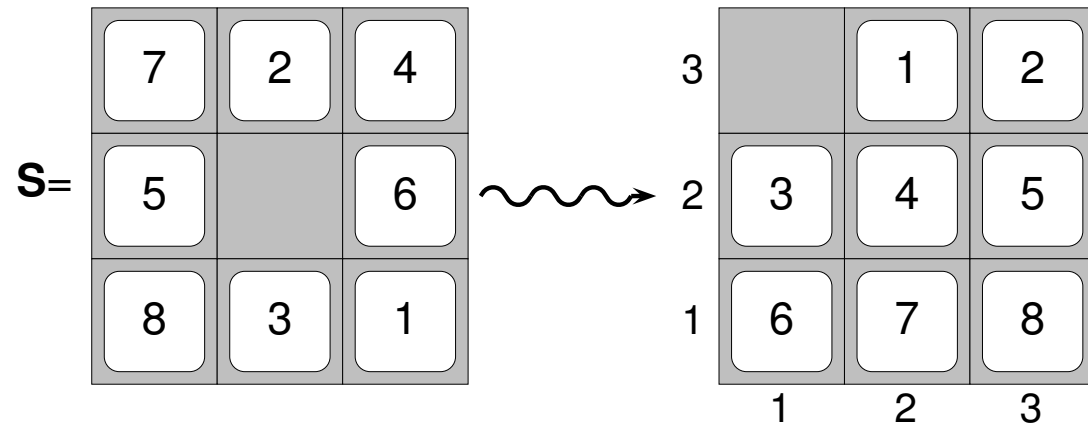
Volba přípustné heuristické funkce h :

→ $h_1(n)$ = počet dlaždiček, které nejsou na svém místě $h_1(\mathbf{S}) = 8$

PŘÍKLAD – ŘEŠENÍ POSUNOVAČKY

konfigurace = seznam dvojic **X/Y** (sloupec/řádek) = [pozice_{díry}, pozice_{kámen č.1}, ...]

goal ([1/3, 2/3, 3/3, 1/2, 2/2,
3/2, 1/1, 2/1, 3/1]).



Volba přípustné heuristické funkce h :

→ $h_1(n)$ = počet dlaždiček, které nejsou na svém místě $h_1(\mathbf{S}) = 8$

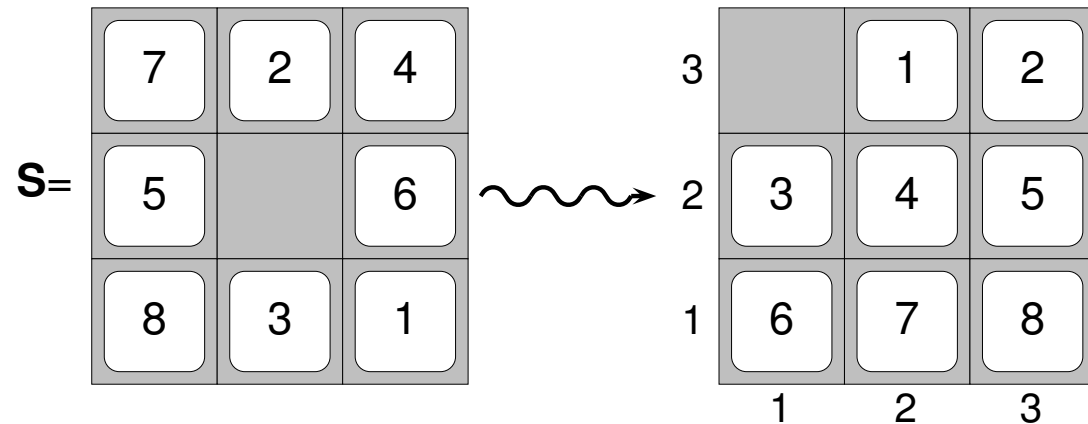
→ $h_2(n)$ = součet **manhattanských vzdáleností** dlaždic od svých správných pozic

$$h_2(\mathbf{S}) = 3_7 + 1_2 + 2_4 + 2_5 + 3_6 + 2_8 + 2_3 + 3_1 = 18$$

PŘÍKLAD – ŘEŠENÍ POSUNOVAČKY

konfigurace = seznam dvojic **X/Y** (sloupec/řádek) = [pozice_{díry}, pozice_{kámen č.1}, ...]

goal ([1/3, 2/3, 3/3, 1/2, 2/2,
3/2, 1/1, 2/1, 3/1]).



Volba přípustné heuristické funkce h :

→ $h_1(n)$ = počet dlaždiček, které nejsou na svém místě $h_1(\mathbf{S}) = 8$

→ $h_2(n)$ = součet **manhattanských vzdáleností** dlaždic od svých správných pozic

$$h_2(\mathbf{S}) = 3_7 + 1_2 + 2_4 + 2_5 + 3_6 + 2_8 + 2_3 + 3_1 = 18$$

h_1 i h_2 jsou přípustné ... $h^*(S) = 26$

URČENÍ KVALITY HEURISTIKY

efektivní faktor větvení b^* – N ...počet vygenerovaných uzlů, d ...hloubka řešení:

$$N + 1 = 1 + b^* + (b^*)^2 + \dots + (b^*)^d$$

např.: když A^* najde řešení po 52 uzlech v hloubce 5 ... $b^* = 1.92$

heuristika je tím lepší, čím blíže je b^* hodnotě 1.

URČENÍ KVALITY HEURISTIKY

efektivní faktor větvení b^* – N ...počet vygenerovaných uzlů, d ...hloubka řešení:

$$N + 1 = 1 + b^* + (b^*)^2 + \dots + (b^*)^d$$

např.: když A^* najde řešení po 52 uzlech v hloubce 5 ... $b^* = 1.92$

heuristika je tím lepší, čím blíže je b^* hodnotě 1.

☞ měření b^* na malé množině testovacích sad – dobrá představa o přínosu heuristiky

d	Průměrný počet uzlů			Efektivní faktor větvení b^*		
	IDS	$A^*(h_1)$	$A^*(h_2)$	IDS	$A^*(h_1)$	$A^*(h_2)$
2	10	6	6	2.45	1.79	1.79
6	680	20	18	2.73	1.34	1.30
10	47127	93	39	2.79	1.38	1.22
12	3644035	227	73	2.78	1.42	1.24
18	–	3056	363	–	1.46	1.26
24	–	39135	1641	–	1.48	1.26

URČENÍ KVALITY HEURISTIKY

efektivní faktor větvení b^* – N ... počet vygenerovaných uzlů, d ... hloubka řešení:

$$N + 1 = 1 + b^* + (b^*)^2 + \dots + (b^*)^d$$

např.: když A^* najde řešení po 52 uzlech v hloubce 5 ... $b^* = 1.92$

heuristika je tím lepší, čím blíže je b^* hodnotě 1.

☞ měření b^* na malé množině testovacích sad – dobrá představa o přínosu heuristiky

d	Průměrný počet uzlů			Efektivní faktor větvení b^*		
	IDS	$A^*(h_1)$	$A^*(h_2)$	IDS	$A^*(h_1)$	$A^*(h_2)$
2	10	6	6	2.45	1.79	1.79
6	680	20	18	2.73	1.34	1.30
10	47127	93	39	2.79	1.38	1.22
12	3644035	227	73	2.78	1.42	1.24
18	–	3056	363	–	1.46	1.26
24	–	39135	1641	–	1.48	1.26

h_2 **dominuje** h_1 ($\forall n : h_2(n) \geq h_1(n)$) ... h_2 je lepší ve všech případech než h_1

HLEDÁNÍ NEJLEPŠÍ CESTY A^* – VLASTNOSTI

→ expanduje uzly podle $f(n) = g(n) + h(n)$

A^* expanduje **všechny** uzly s $f(n) < C^*$

A^* expanduje **některé** uzly s $f(n) = C^*$

A^* **ne**expanduje **žádné** uzly s $f(n) > C^*$

→ *úplnost*

optimálnost

časová složitost

prostorová složitost

HLEDÁNÍ NEJLEPŠÍ CESTY A^* – VLASTNOSTI

→ expanduje uzly podle $f(n) = g(n) + h(n)$

A^* expanduje **všechny** uzly s $f(n) < C^*$

A^* expanduje **některé** uzly s $f(n) = C^*$

A^* **ne**expanduje **žádné** uzly s $f(n) > C^*$

→ *úplnost* je úplný (pokud [počet uzlů s $f < C^*$] $\neq \infty$)

optimálnost

časová složitost

prostorová složitost

HLEDÁNÍ NEJLEPŠÍ CESTY A^* – VLASTNOSTI

→ expanduje uzly podle $f(n) = g(n) + h(n)$

A^* expanduje **všechny** uzly s $f(n) < C^*$

A^* expanduje **některé** uzly s $f(n) = C^*$

A^* **ne**expanduje **žádné** uzly s $f(n) > C^*$

→ *úplnost* je úplný (pokud [počet uzlů s $f < C^*$] $\neq \infty$)

optimálnost je optimální

časová složitost

prostorová složitost

HLEDÁNÍ NEJLEPŠÍ CESTY A^* – VLASTNOSTI

→ expanduje uzly podle $f(n) = g(n) + h(n)$

A^* expanduje **všechny** uzly s $f(n) < C^*$

A^* expanduje **některé** uzly s $f(n) = C^*$

A^* **ne**expanduje **žádné** uzly s $f(n) > C^*$

→ *úplnost* je úplný (pokud [počet uzlů s $f < C^*$] $\neq \infty$)

optimálnost je optimální

časová složitost $O((b^*)^d)$, exponenciální v délce řešení d

prostorová složitost

HLEDÁNÍ NEJLEPŠÍ CESTY A^* – VLASTNOSTI

→ expanduje uzly podle $f(n) = g(n) + h(n)$

A^* expanduje **všechny** uzly s $f(n) < C^*$

A^* expanduje **některé** uzly s $f(n) = C^*$

A^* **ne**expanduje **žádné** uzly s $f(n) > C^*$

→ *úplnost* je úplný (pokud [počet uzlů s $f < C^*$] $\neq \infty$)

optimálnost je optimální

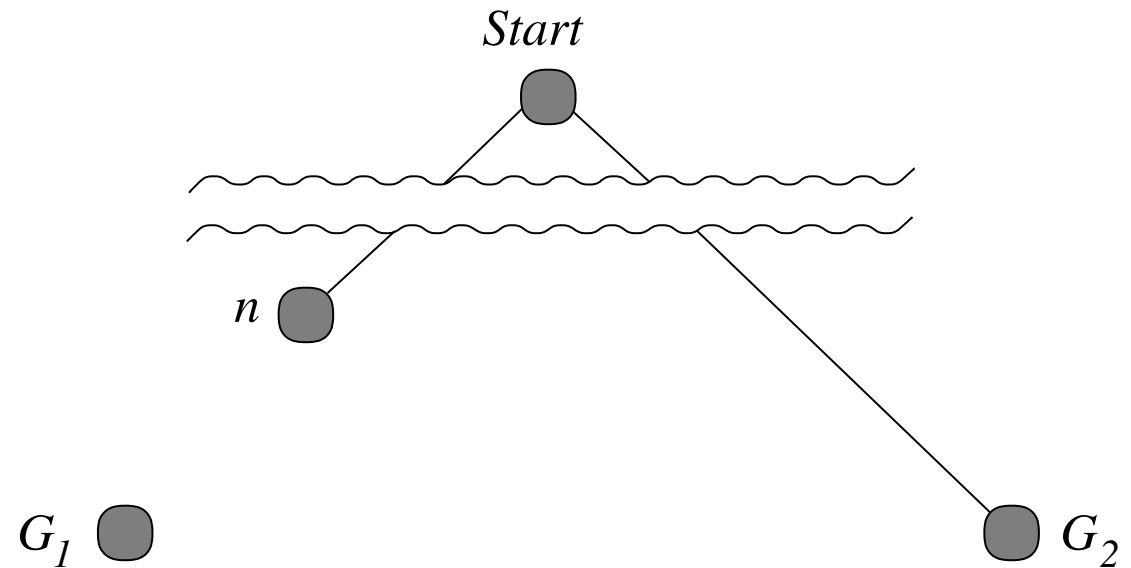
časová složitost $O((b^*)^d)$, exponenciální v délce řešení d

prostorová složitost $O((b^*)^d)$, každý uzel v paměti

Problém s prostorovou složitostí řeší některé nedávné algoritmy (např. *Memory-bounded heuristic search*)

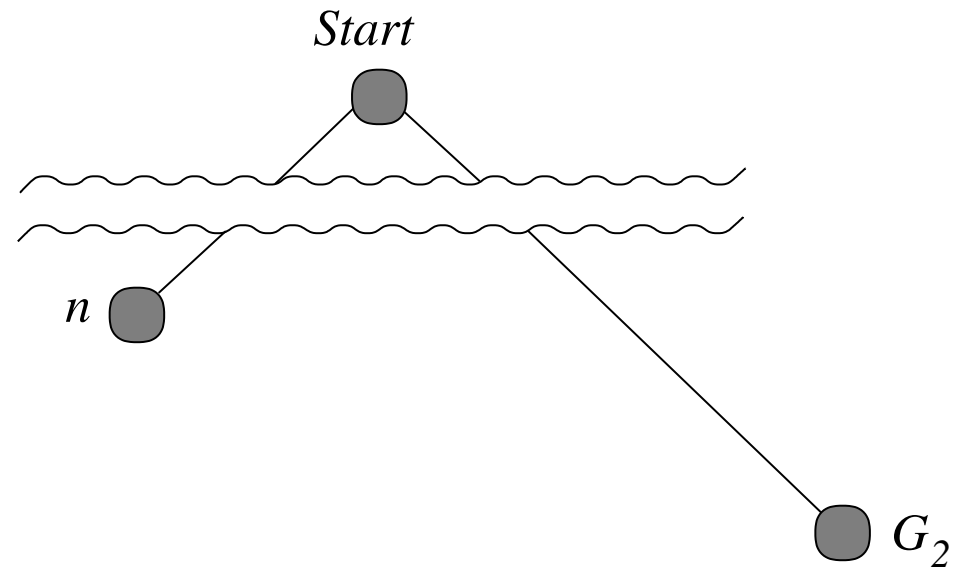
DŮKAZ OPTIMÁLNOSTI ALGORITMU A*

- předpokládejme, že byl vygenerován nějaký **suboptimální cíl** G_2 a je uložen ve frontě.
- dále nechť n je **neexpandovaný** uzel na nejkratší cestě k **optimálnímu cíli** G_1 (tj. *chybně neexpandovaný* uzel ve správném řešení)



DŮKAZ OPTIMÁLNOSTI ALGORITMU A*

- předpokládejme, že byl vygenerován nějaký **suboptimální cíl** G_2 a je uložen ve frontě.
- dále nechť n je **neexpandovaný** uzel na nejkratší cestě k **optimálnímu cíli** G_1 (tj. *chybně neexpandovaný* uzel ve správném řešení)

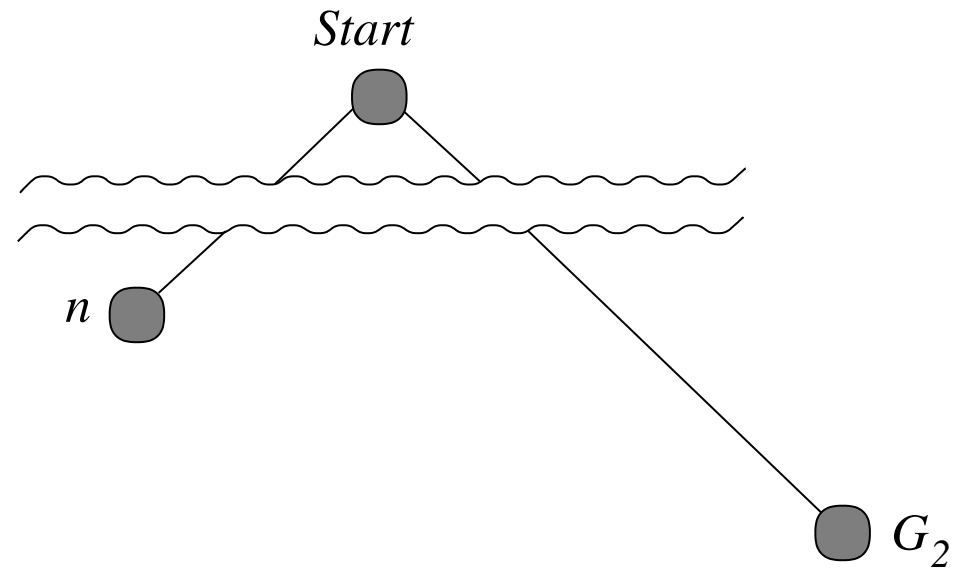


Pak

$$\begin{aligned}
 f(G_2) &= g(G_2) && \text{protože } h(G_2) = 0 \\
 &> g(G_1) && \text{protože } G_2 \text{ je suboptimální} \\
 &\geq f(n) && \text{protože } h \text{ je přípustná}
 \end{aligned}$$

DŮKAZ OPTIMÁLNOSTI ALGORITMU A*

- předpokládejme, že byl vygenerován nějaký **suboptimální cíl** G_2 a je uložen ve frontě.
- dále nechť n je **neexpandovaný** uzel na nejkratší cestě k **optimálnímu cíli** G_1 (tj. *chybně neexpandovaný* uzel ve správném řešení)



Pak

$$\begin{aligned}
 f(G_2) &= g(G_2) && \text{protože } h(G_2) = 0 \\
 &> g(G_1) && \text{protože } G_2 \text{ je suboptimální} \\
 &\geq f(n) && \text{protože } h \text{ je přípustná}
 \end{aligned}$$

tedy $f(G_2) > f(n)$ a \Rightarrow A* nikdy nevybere G_2 pro expanzi dřív než expanduje n

→ **spor** s předpokladem, že n je *neexpandovaný uzel*

□

JAK NAJÍT PŘÍPUSTNOU HEURISTICKOU FUNKCI?

→ je možné najít obecné pravidlo, jak objevit heuristiku h_1 nebo h_2 ?

JAK NAJÍT PŘÍPUSTNOU HEURISTICKOU FUNKCI?

- je možné najít obecné pravidlo, jak objevit heuristiku h_1 nebo h_2 ?
- h_1 i h_2 jsou délky cest pro **zjednodušené verze** problému Posunovačka:
 - při **přenášení** dlaždice kamkoliv – h_1 =počet kroků nejkratšího řešení
 - při **posouvání** dlaždice kamkoliv **o 1 pole** (i na plné) – h_2 =počet kroků nejkratšího řešení

JAK NAJÍT PŘÍPUSTNOU HEURISTICKOU FUNKCI?

- je možné najít obecné pravidlo, jak objevit heuristiku h_1 nebo h_2 ?
- h_1 i h_2 jsou délky cest pro **zjednodušené verze** problému Posunovačka:
 - při **přenášení** dlaždice kamkoliv – h_1 =počet kroků nejkratšího řešení
 - při **posouvání** dlaždice kamkoliv **o 1 pole** (i na plné) – h_2 =počet kroků nejkratšího řešení
- **relaxovaný problém** – méně omezení na akce než původní problém
 - Cena optimálního řešení **relaxovaného problému** je **přípustná heuristika** pro původní problém.*
 - optimální řešení původního problému = řešení relaxovaného problému

JAK NAJÍT PŘÍPUSTNOU HEURISTICKOU FUNKCI?

- je možné najít obecné pravidlo, jak objevit heuristiku h_1 nebo h_2 ?
- h_1 i h_2 jsou délky cest pro **zjednodušené verze** problému Posunovačka:
 - při **přenášení** dlaždice kamkoliv – h_1 =počet kroků nejkratšího řešení
 - při **posouvání** dlaždice kamkoliv o **1 pole** (i na plné) – h_2 =počet kroků nejkratšího řešení
- **relaxovaný problém** – méně omezení na akce než původní problém

Cena optimálního řešení relaxovaného problému je přípustná heuristika pro původní problém.

optimální řešení původního problému = řešení relaxovaného problému

Posunovačka a relaxovaná posunovačka:

- dlaždice se může přesunout z A na B \Leftrightarrow A sousedí s B \wedge B je prázdná.
- (a) dlaždice se může přesunout z A na B \Leftrightarrow A sousedí s B.
 - (b) dlaždice se může přesunout z A na B \Leftrightarrow B je prázdná.
 - (c) dlaždice se může přesunout z A na B.

JAK NAJÍT PŘÍPUSTNOU HEURISTICKOU FUNKCI?

- je možné najít obecné pravidlo, jak objevit heuristiku h_1 nebo h_2 ?
- h_1 i h_2 jsou délky cest pro **zjednodušené verze** problému Posunovačka:
 - při **přenášení** dlaždice kamkoliv – h_1 =počet kroků nejkratšího řešení
 - při **posouvání** dlaždice kamkoliv **o 1 pole** (i na plné) – h_2 =počet kroků nejkratšího řešení
- **relaxovaný problém** – méně omezení na akce než původní problém

Cena optimálního řešení relaxovaného problému je přípustná heuristika pro původní problém.

optimální řešení původního problému = řešení relaxovaného problému

Posunovačka a relaxovaná posunovačka:

- dlaždice se může přesunout z A na B \Leftrightarrow A sousedí s B \wedge B je prázdná.
- (a) dlaždice se může přesunout z A na B \Leftrightarrow A sousedí s B.
 - (b) dlaždice se může přesunout z A na B \Leftrightarrow B je prázdná.
 - (c) dlaždice se může přesunout z A na B. h_1

JAK NAJÍT PŘÍPUSTNOU HEURISTICKOU FUNKCI?

- je možné najít obecné pravidlo, jak objevit heuristiku h_1 nebo h_2 ?
- h_1 i h_2 jsou délky cest pro **zjednodušené verze** problému Posunovačka:
 - při **přenášení** dlaždice kamkoliv – h_1 =počet kroků nejkratšího řešení
 - při **posouvání** dlaždice kamkoliv o **1 pole** (i na plné) – h_2 =počet kroků nejkratšího řešení
- **relaxovaný problém** – méně omezení na akce než původní problém

Cena optimálního řešení relaxovaného problému je přípustná heuristika pro původní problém.

optimální řešení původního problému = řešení relaxovaného problému

Posunovačka a relaxovaná posunovačka:

- dlaždice se může přesunout z A na B \Leftrightarrow A sousedí s B \wedge B je prázdná.
- (a) dlaždice se může přesunout z A na B \Leftrightarrow A sousedí s B. h_2
 - (b) dlaždice se může přesunout z A na B \Leftrightarrow B je prázdná.
 - (c) dlaždice se může přesunout z A na B. h_1

JAK NAJÍT PŘÍPUSTNOU HEURISTICKOU FUNKCI?

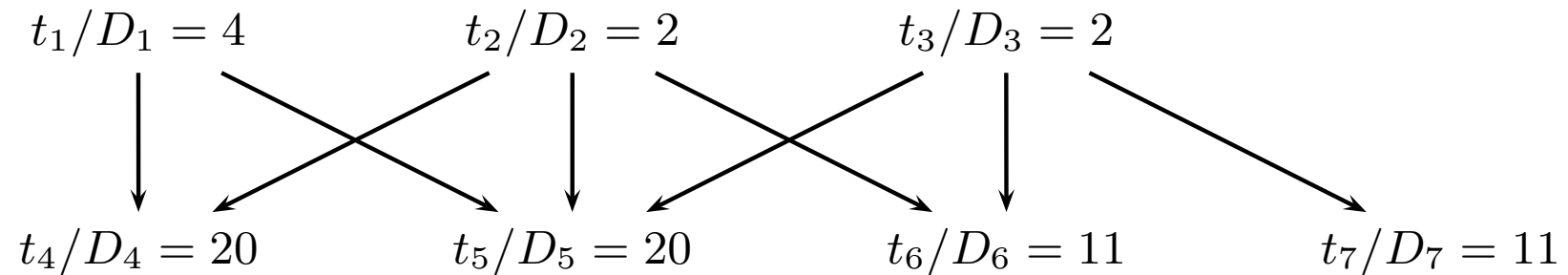
- je možné najít obecné pravidlo, jak objevit heuristiku h_1 nebo h_2 ?
- h_1 i h_2 jsou délky cest pro **zjednodušené verze** problému Posunovačka:
 - při **přenášení** dlaždice kamkoliv – h_1 =počet kroků nejkratšího řešení
 - při **posouvání** dlaždice kamkoliv o **1 pole** (i na plné) – h_2 =počet kroků nejkratšího řešení
- **relaxovaný problém** – méně omezení na akce než původní problém
Cena optimálního řešení relaxovaného problému je přípustná heuristika pro původní problém.
optimální řešení původního problému = řešení relaxovaného problému

Posunovačka a relaxovaná posunovačka:

- dlaždice se může přesunout z A na B \Leftrightarrow A sousedí s B \wedge B je prázdná.
- (a) dlaždice se může přesunout z A na B \Leftrightarrow A sousedí s B. h_2
- (b) dlaždice se může přesunout z A na B \Leftrightarrow B je prázdná. Gaschnigova heuristika
- (c) dlaždice se může přesunout z A na B. h_1

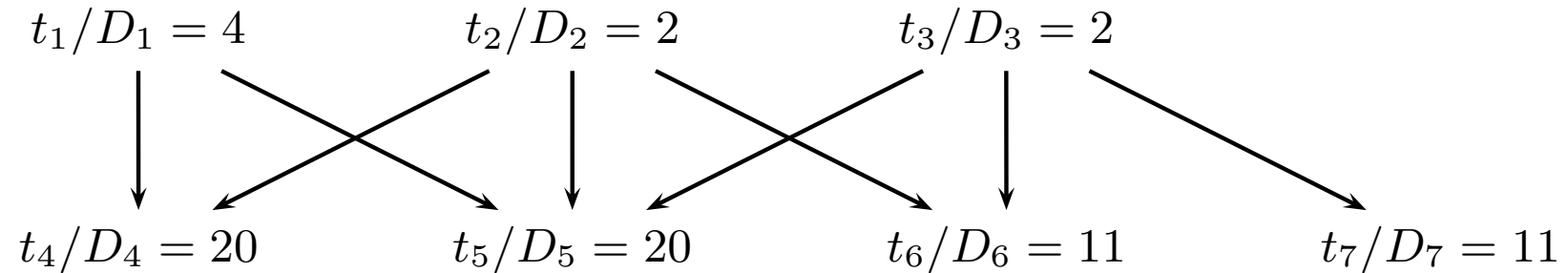
PŘÍKLAD – ROZVRH PRÁCE PROCESORŮ

- úlohy t_i s potřebným časem na zpracování D_i (např.: $i = 1, \dots, 7$)
- m procesorů (např.: $m = 3$)
- relace precedence mezi úlohami – které úlohy mohou začít až po skončení dané úlohy



PŘÍKLAD – ROZVRH PRÁCE PROCESORŮ

- úlohy t_i s potřebným časem na zpracování D_i (např.: $i = 1, \dots, 7$)
- m procesorů (např.: $m = 3$)
- relace precedence mezi úlohami – které úlohy mohou začít až po skončení dané úlohy

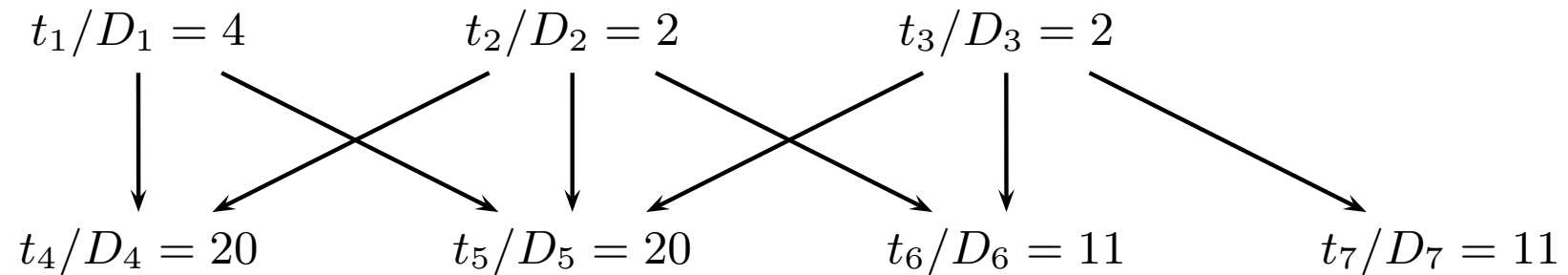


- problém: najít rozvrh práce pro každý procesor s minimalizací celkového času

	0	2	4	13	24	33
CPU ₁		t_3	$\leftarrow t_6 \Rightarrow$	$\leftarrow t_5 \Rightarrow$		
CPU ₂		t_2	$\leftarrow t_7 \Rightarrow$		
CPU ₃		t_1	$\leftarrow t_4 \Rightarrow$		

PŘÍKLAD – ROZVRH PRÁCE PROCESORŮ

- úlohy t_i s potřebným časem na zpracování D_i (např.: $i = 1, \dots, 7$)
- m procesorů (např.: $m = 3$)
- relace precedence mezi úlohami – které úlohy mohou začít až po skončení dané úlohy



- problém: najít rozvrh práce pro každý procesor s minimalizací celkového času

	0	2	4	13	24	33		
CPU ₁		t_3	←	t_6	→	←	t_5	→
CPU ₂		t_2	←	t_7	→		
CPU ₃		t_1	→	←	t_4	→	

	0	2	4	13	24	33			
CPU ₁		t_3	←	t_6	→	←	t_7	→
CPU ₂		t_2	..	←	t_5	→		
CPU ₃		t_1	→	←	t_4	→		

PŘÍKLAD – ROZVRH PRÁCE PROCESORŮ pokrač.

→ stavy: **nezařazené_úlohy*zařazené_úlohy*čas_ukončení**
např.: **[WaitingTask1/D1,WaitingTask2/D2,...]*[Task1/F1,Task2/F2,...]*FinTime**

PŘÍKLAD – ROZVRH PRÁCE PROCESORŮ pokrač.

- stavy: **nezařazené_úlohy*zařazené_úlohy*čas_ukončení**
 např.: **[WaitingTask1/D1,WaitingTask2/D2,...]*[Task1/F1,Task2/F2,...]*FinTime**
- přechodová funkce **move(+Uzel, -NasUzel, -Cena)**:

```

move(Tasks1*[_/F|Active]*Fin1, Tasks2*Active2*Fin2, Cost) :-
  del1(Task/D,Tasks1,Tasks2), not (member(T/_ ,Tasks2),before(T,Task)),
  not (member(T1/F1,Active1),F<F1,before(T1,Task)),
  Time is F+D, insert(Task/Time,Active1,Active2,Fin1,Fin2), Cost is Fin2-Fin1.
move(Tasks*[_/F|Active1]*Fin,Tasks*Active2*Fin,0) :- insertidle(F,Active1,Active2).

```

```

before(T1,T2) :- precedence(T1,T2).
before(T1,T2) :- precedence(T,T2),before(T1,T).

```

```

insert (S/A,[T/B|L],[ S/A,T/B|L],F,F) :- A=<B,!.
insert (S/A,[T/B|L],[ T/B|L1],F1,F2) :- insert(S/A,L,L1,F1,F2).
insert (S/A,[],[ S/A],-,A).

```

```

insertidle (A,[T/B|L],[ idle /B,T/B|L]) :- A<B,!.
insertidle (A,[T/B|L],[ T/B|L1]) :- insertidle (A,L,L1).

```

```

goal ([]*_*_*).

```

PŘÍKLAD – ROZVRH PRÁCE PROCESORŮ pokrač.

→ počáteční uzel:

`start ([t1 /4, t2 /2, t3 /2, t4 /20, t5 /20, t6 /11, t7 /11]*[idle /0, idle /0, idle /0]*0).`

PŘÍKLAD – ROZVRH PRÁCE PROCESORŮ pokrač.

→ počáteční uzel: `start ([t1 /4, t2 /2, t3 /2, t4 /20, t5 /20, t6 /11, t7 /11]*[idle /0, idle /0, idle /0]*0).`

→ heuristika

optimální (nedosažitelný) čas:

$$\mathbf{Finall} = \frac{\sum_i D_i + \sum_j F_j}{m}$$

skutečný čas výpočtu: $\mathbf{Fin} = \max(F_j)$

heuristická funkce h :

$$\mathbf{H} = \begin{cases} \mathbf{Finall} - \mathbf{Fin}, & \text{když } \mathbf{Finall} > \mathbf{Fin} \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

```
h(Tasks * Processors * Fin, H) :-
  totaltime (Tasks, Totime),
  sumnum(Processors, Ftime, N),
  Finall is (Totime + Ftime)/N,
  (Finall > Fin, !, H is Finall - Fin
   ;
   H = 0).
```

```
totaltime ([], 0).
totaltime ([_ /D | Tasks], T) :-
  totaltime (Tasks, T1), T is T1 + D.
```

```
sumnum([], 0, 0).
sumnum([_ /T | Procs], FT, N) :-
  sumnum(Procs, FT1, N1),
  N is N1 + 1, FT is FT1 + T.
```

```
precedence(t1, t4). precedence(t1, t5).
```

```
...
```