# Problémy s omezujícími podmínkami

**Aleš Horák**

**E-mail: `hales@fi.muni.cz`**

**`http://nlp.fi.muni.cz/uui/`**

Obsah:

➜ Průběžná písemná práce

➜ Problémy s omezujícími podmínkami

➜ CLP – Constraint Logic Programming

➜ Příklad – algebrogram

➜ Řešení problémů s omezujícími podmínkami

➜ Příklad – problém N dam

# Průběžná písemná práce

- délka pro vypracování: **25 minut**
- **nejsou** povoleny **žádné** materiály
- u odpovědí typu A, B, C, D, E:
  - pouze jedna odpověď je **nejsprávnější** ☺
  - za tuto nejsprávnější je **8 bodů**
  - za žádnou odpověd je **0 bodů**
  - za libovolnou jinou, případně za nejasné označení odpovědi je **mínus 3 body**
- celkové hodnocení **0 až 32 bodů** (celkové záporné hodnocení se bere jako 0)

# Problémy s omezujícími podmínkami

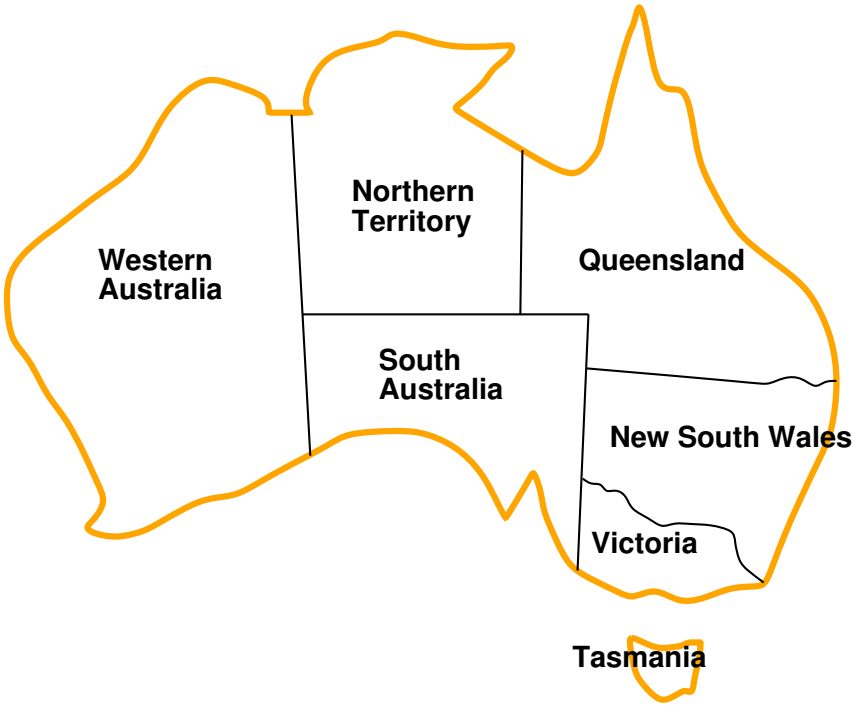
- **standardní problém** řešený prohledáváním stavového prostoru $\longrightarrow$ **stav** je "*černá skříňka*" – pouze **cílová podmínka** a **přechodová funkce**
- **problém s omezujícími podmínkami**, *Constraint Satisfaction Problem*, CSP:
  - $n$-tice **proměnných** $X_1, X_2, \ldots, X_n$ s hodnotami z **domén** $D_1, D_2, \ldots, D_n$, $D_i \neq \emptyset$
  - množina **omezení** $C_1, C_2, \ldots, C_m$ nad proměnnými $X_i$
  - **stav** = **přiřazení hodnot** proměnným $\{X_i = v_i, X_j = v_j, \ldots\}$

    *konzistentní přiřazení* neporušuje žádné z omezení $C_i$

    *úplné přiřazení* zmiňuje každou proměnnou $X_i$
  - **řešení** = **úplné konzistentní přiřazení hodnot** proměnným

    někdy je ještě potřeba maximalizovat *cílovou funkci*
- výhody:
  - jednoduchý **formální jazyk** pro specifikaci problému
  - může využívat **obecné heuristiky** (ne jen specifické pro daný problém)

## Příklad – obarvení mapy




**Proměnné** $WA, NT, Q, NSW, V, SA, T$

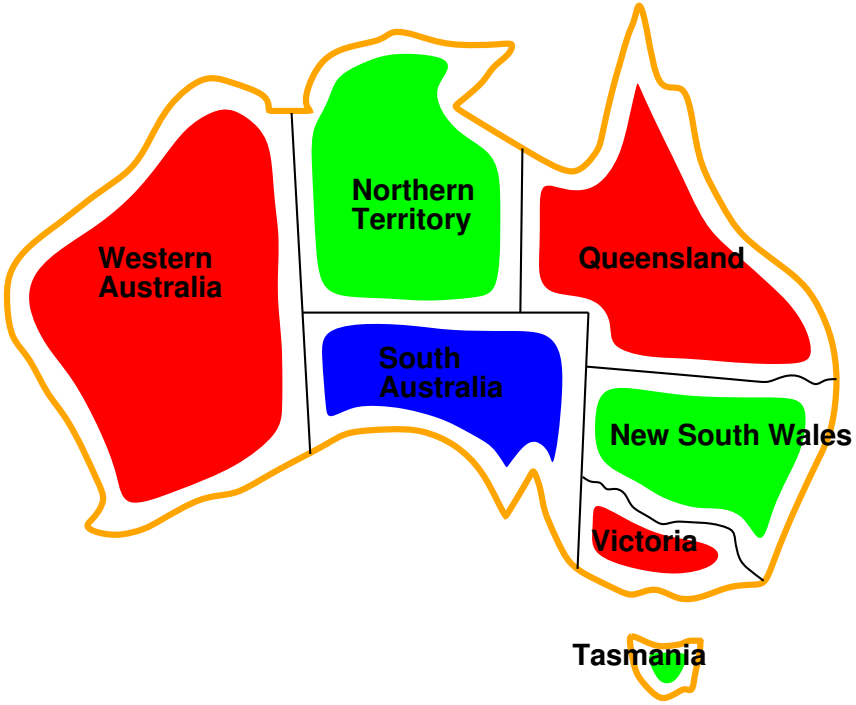
**Domény** $D_i = \{\text{červená}, \text{zelená}, \text{modrá}\}$

**Omezení** – sousedící oblasti musí mít různou barvu

tj. pro každé dvě sousedící: $WA \neq NT$ nebo

$(WA, NT) \in \{(\text{červená}, \text{zelená}), (\text{červená}, \text{modrá}), (\text{zelená}, \text{modrá}), \ldots\}$

## Příklad – obarvení mapy pokrač.

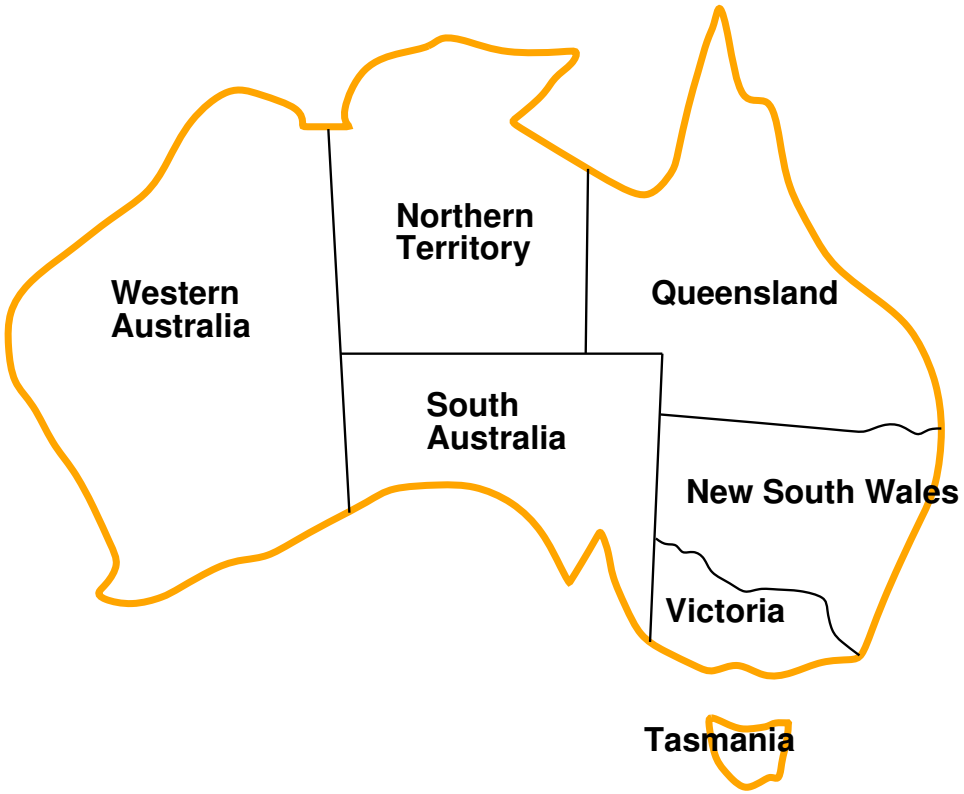


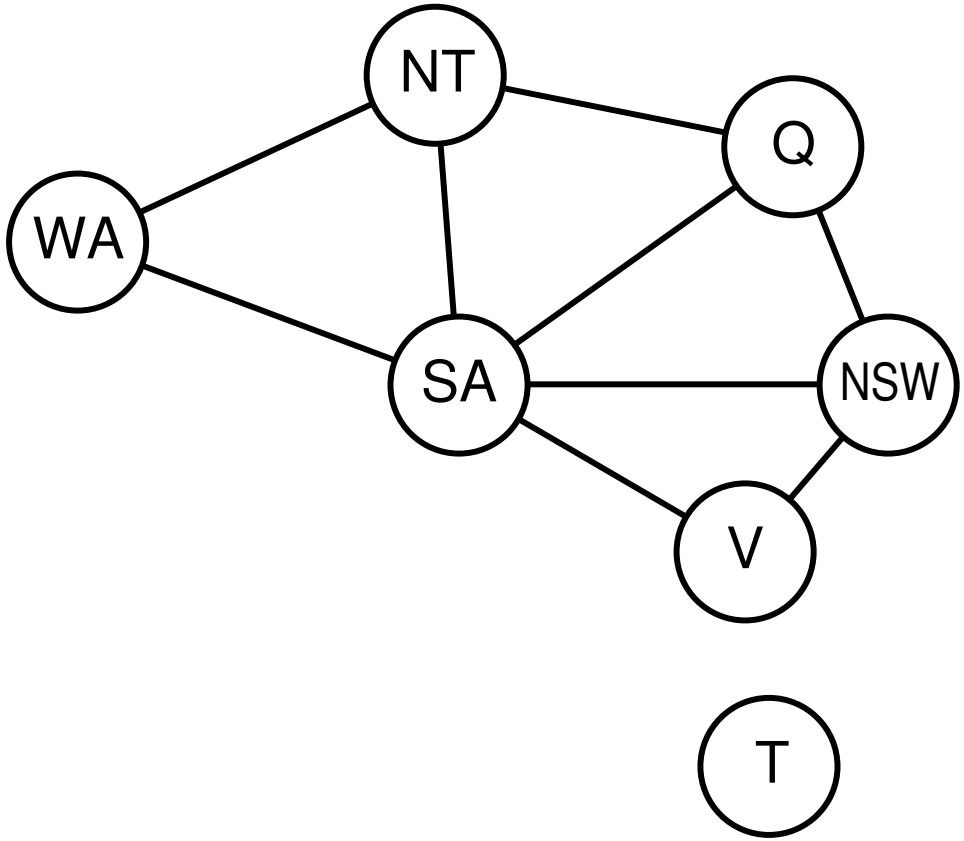

**Řešení** – konzistentní přiřazení všem proměnným:

$\{WA =$ červená, $NT =$ zelená, $Q =$ červená, $NSW =$ zelená, $V =$ červená, $SA =$ modrá, $T =$ zelená$\}$

# Graf omezení

Pro **binární** omezení: **uzly** = proměnné, **hrany** = reprezentují jednotlivá omezení




Algoritmy pro řešení CSP využívají této grafové reprezentace omezení

## Varianty CSP podle hodnot proměnných

- **diskrétní hodnoty proměnných** – každá proměnná má jednu konkrétní hodnotu
  - **konečné domény**
    - např. Booleovské (včetně NP-úplných problémů splnitelnosti)
    - výčtové
  - **nekonečné domény** – čísla, řetězce, . . .
    - např. rozvrh prací – proměnné = počáteční/koncový den každého úkolu
    - vyžaduje **jazyk omezení**, např. $StartJob_1 + 5 \leq StartJob_3$
    - číselné *lineární* problémy jsou řešitelné, *nelineární* obecné řešení nemají
- **spojité hodnoty proměnných**
  - časté u reálných problémů
  - např. počáteční/koncový čas měření na Hubbleově teleskopu (závisí na astronomických, precedenčních a technických omezeních)
  - *lineární omezení* řešené pomocí **Lineárního programování** (omezení = lineární nerovnice tvořící konvexní oblast) $\longrightarrow$ jsou řešitelné v polynomiálním čase

## Varianty omezení

- **unární** omezení zahrnuje jedinou proměnnou
  např. $SA \neq$ zelená
- **binární** omezení zahrnují dvě proměnné
  např. $SA \neq WA$
- omezení **vyššího řádu** zahrnují 3 a více proměnných
  např. kryptoaritmetické omezení na sloupce u algebrogramu
- **preferenční** omezení (soft constraints), např. ‘červená je lepší než zelená’
  možno reprezentovat pomocí **ceny přiřazení** u konkrétní hodnoty a konkrétní proměnné $\longrightarrow$ hledá se **optimalizované řešení** vzhledem k ceně

# CLP – Constraint Logic Programming

```
% SICStus Prolog
:- use_module(library(clpfd)).     % clpq , clpr

?- X in 1..5, Y in 2..8, X+Y #= T.
   X in 1..5,
   Y in 2..8,
   T in 3..13
   Yes

?- X in 1..5, Y in 2..8, X+Y #= T, labeling([],[X,Y,T]).
   T = 3,
   X = 1,
   Y = 2
   Yes
```

**aritmetická omezení** ...

- ➜ *rel. operátory* **#=**, **#\=**, **#<**, **#=<**, **#>**, **#>=**
- ➜ **sum(Variables,RelOp,Suma)**

**výroková omezení** ...

**\#** *negace*, **#/** *konjunkce*, **#\/** *disjunkce*, **#<=>** *ekvivalence*

**domain( +Variables, +Min, +Max)**

**?X in +Min..+Max**

**?X in +Range** ...

**A in (1..3) \/(8..15) \/(5..9) \/100.**

**fd_dom(?Var,?Range)** *zjištění domény proměnné*

**fd_set(?Var,?FDSet), ?X in_set +FDSet** *příslušnost k dané konečné doméně*

# CLP – Constraint Logic Programming pokrač.

```
?- X #< 4, domain([X,Y],0,5).
   X in 0..3, Y in 0..5 ?
   Yes

?- X #< 4, indomain(X).
   Instantiation error

?- X #> 3, X #< 6, indomain(X).
   X = 4 ? ;
   X = 5 ? ;
   No

?- X in 4..sup, X #\= 17, fd_set(X,F).
   F = [[4|16],[18| sup]],
   X in (4..16) \/ (18..sup) ?
   Yes
```

# Příklad – algebrogram

```
    S E N D
+   M O R E
----------
  M O N E Y
```

**Proměnné** $\{S, E, N, D, M, O, R, Y\}$

**Domény** $D_i = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

**Omezení**
- $S > 0, M > 0$
- $S \neq E \neq N \neq D \neq M \neq O \neq R \neq Y$
- $D + E = R + 10 * X_1,$
  $N + R + X_1 = E + 10 * X_2, \ldots$

```
moremoney([S,E,N,D,M,O,R,Y], Type) :- domain([S,E,N,D,M,O,R,Y],0,9),
                                      S #> 0, M #> 0,
                                      all_different ([S,E,N,D,M,O,R,Y]),
                                      sum(S,E,N,D,M,O,R,Y),
                                      labeling(Type, [S,E,N,D,M,O,R,Y]).

sum(S,E,N,D,M,O,R,Y):-                1000*S + 100*E + 10*N + D
                      +               1000*M + 100*O + 10*R + E
                      #= 10000*M + 1000*O + 100*N + 10*E + Y.

?-moremoney([S,E,N,D,M,O,R,Y],[]). % Type=[] ... Type = [ leftmost , step , up, all ]
D = 7, E = 5, M = 1, N = 6, O = 0, R = 8, S = 9, Y = 2 ?
Yes
```

# Inkrementální formulace CSP

CSP je možné převést na standardní prohledávání takto:

- **stav** – přiřazení hodnot proměnným
- **počáteční stav** – prázdné přiřazení $\{\}$
- **přechodová funkce** – přiřazení hodnoty libovolné dosud nenastavené proměnné tak, aby výsledné přiřazení bylo konzistentní
- **cílová podmínka** – aktuální přiřazení je úplné
- **cena cesty** – konstantní (např. 1) pro každý krok

1. platí beze změny pro **všechny** CSP!
2. prohledávácí strom dosahuje hloubky $n$ (počet proměnných) a řešení se nachází v této hloubce $(d = n) \Rightarrow$ je vhodné použít **prohledávání do hloubky**

## Prohledávání s navracením

- přiřazení proměnným jsou **komutativní**
  tj. $[1.\ WA =$ červená, $\quad 2.\ NT =$ zelená$]$ je totéž jako $[1.\ NT =$ zelená, $\quad 2.\ WA =$ červená$]$
- stačí uvažovat pouze **přiřazení jediné proměnné** v každém kroku $\Rightarrow$ počet listů $d^n$
- prohledávání do hloubky pro CSP – tzv. **prohledávání s navracením** (*backtracking search*)
- prohledávání s navracením je základní neinformovaná strategie pro řešení problémů s omezujícími podmínkami
- schopný vyřešit např. problém $n$-dam pro $n \approx 25$

# Příklad – problém $N$ dam

```
queens(N,L,Type):- length(L,N),
                   domain(L,1,N),
                   constr_all(L),
                   labeling(Type,L).

constr_all ([]).
constr_all([X|Xs]):- constr_between(X,Xs,1), constr_all(Xs).

constr_between(_,[],_).
constr_between(X,[Y|Ys],N):-
    no_threat(X,Y,N),
    N1 is N+1,
    constr_between(X,Ys,N1).

no_threat(X,Y,J):- X #\= Y, X+J #\= Y, X-J #\= Y.

?- queens(4, L, [ff]).
    L = [2,4,1,3] ? ;
    L = [3,1,4,2] ? ;
    No
```

*1. definice proměnných a domén*

*2. definice omezení*

*3. hledání řešení*

## Ovlivnění efektivity prohledávání s navracením

**Obecné metody** ovlivnění efektivity:

- Která proměnná dostane hodnotu v tomto kroku?
- V jakém pořadí zkoušet přiřazení hodnot konkrétní proměnné?
- Můžeme předčasně detekovat nutný neúspěch v dalších krocích?

používané strategie:

- ❑ **nejomezenější proměnná** $\longrightarrow$ vybrat proměnnou s nejméně možnými hodnotami
- ❑ **nejvíce omezující proměnná** $\longrightarrow$ vybrat proměnnou s nejvíce omezeními na zbývající proměnné
- ❑ **nejméně omezující hodnota** $\longrightarrow$ pro danou proměnnou – hodnota, která zruší nejmíň hodnot zbývajících proměnných
- ❑ **dopředná kontrola** $\longrightarrow$ udržovat seznam možných hodnot pro zbývající proměnné
- ❑ **propagace omezení** $\longrightarrow$ navíc kontrolovat možné nekonzistence mezi zbývajícími proměnnými

# Ovlivnění efektivity v CLP

**V Prologu (CLP)** možnosti ovlivnění efektivity – **labeling(Typ, ...)**:

```
?– constraints(Vars,Cost),
   labeling([ff,bisect,down,minimize(Cost)],Vars).
```

- **výběr proměnné** – **leftmost**, **min**, **max**, **ff**, . . .
- **dělení domény** – **step**, **enum**, **bisect**, **value(Enum)**
- **prohledávání domény** – **up**, **down**
- **která řešení** – **all**, **minimize(X)**, **maximize(X)**, . . .