Problémy s omezujícími podmínkami

Aleš Horák

E-mail: hales@fi.muni.cz

http://nlp.fi.muni.cz/uui/

Obsah:

➜ Průběžná písemná práce
➜ Problémy s omezujícími podmínkami
➜ CLP – Constraint Logic Programming
➜ Příklad – algebrogram
➜ Řešení problémů s omezujícími podmínkami
➜ Příklad – problém N dam

Průběžná písemná práce

➜ délka pro vypracování: **25 minut**

➜ **nejsou** povoleny **žádné** materiály

➜ u odpovědí typu A, B, C, D, E:
- pouze jedna odpověď je **nejsprávnější** ☺
- za tuto nejsprávnější je **8 bodů**
- za žádnou odpověď je **0 bodů**
- za libovolnou jinou, případně za nejasné označení odpovědi je **mínus 3 body**

➜ celkové hodnocení **0 až 32 bodů** (celkové záporné hodnocení se bere jako 0)

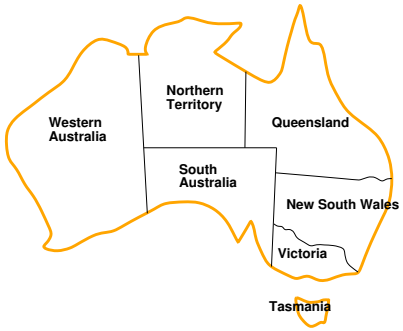
Problémy s omezujícími podmínkami

➜ **standardní problém** řešený prohledáváním stavového prostoru → **stav** je "*černá skříňka*" – pouze **cílová podmínka** a **přechodová funkce**

➜ **problém s omezujícími podmínkami**, *Constraint Satisfaction Problem*, CSP:
- n-tice **proměnných** $X_1, X_2, \ldots, X_n$ s hodnotami z **domén** $D_1, D_2, \ldots, D_n, D_i \neq \emptyset$
- množina **omezení** $C_1, C_2, \ldots, C_m$ nad proměnnými X_i
- **stav** = **přiřazení hodnot** proměnným $\{X_i = v_i, X_j = v_j, \ldots\}$
  konzistentní přiřazení neporušuje žádné z omezení C_i
  úplné přiřazení zmiňuje každou proměnnou X_i
- **řešení** = **úplné konzistentní přiřazení hodnot** proměnným
  někdy je ještě potřeba maximalizovat *cílovou funkci*

➜ výhody:
- jednoduchý **formální jazyk** pro specifikaci problému
- může využívat **obecné heuristiky** (ne jen specifické pro daný problém)

Příklad – obarvení mapy



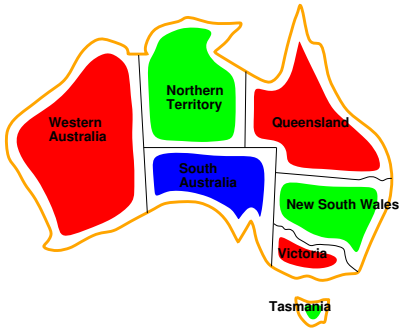
Proměnné WA, NT, Q, NSW, V, SA, T

Domény $D_i = \{$červená, zelená, modrá$\}$

Omezení – sousedící oblasti musí mít různou barvu

tj. pro každé dvě sousedící: $WA \neq NT$ nebo
$(WA, NT) \in \{$(červená, zelená), (červená, modrá), (zelená, modrá), $\ldots\}$

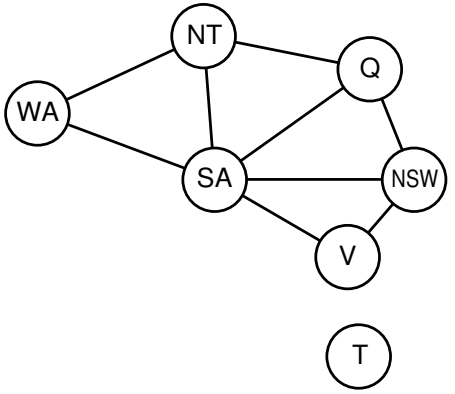
Příklad – obarvení mapy pokrač.



Řešení – konzistentní přiřazení všem proměnným:
$\{WA = \text{červená}, NT = \text{zelená}, Q = \text{červená}, NSW = \text{zelená}, V = \text{červená}, SA = \text{modrá}, T = \text{zelená}\}$

Graf omezení

Pro **binární** omezení: **uzly** = proměnné, **hrany** = reprezentují jednotlivá omezení



Algoritmy pro řešení CSP využívají této grafové reprezentace omezení

Varianty CSP podle hodnot proměnných

- **diskrétní hodnoty proměnných** – každá proměnná má jednu konkrétní hodnotu
  - **konečné domény**
    - např. Booleovské (včetně NP-úplných problémů splnitelnosti)
    - výčtové
  - **nekonečné domény** – čísla, řetězce, ...
    - např. rozvrh prací – proměnné = počáteční/koncový den každého úkolu
    - vyžaduje **jazyk omezení**, např. $StartJob_1 + 5 \leq StartJob_3$
    - číselné *lineární* problémy jsou řešitelné, *nelineární* obecné řešení nemají
- **spojité hodnoty proměnných**
  - časté u reálných problémů
  - např. počáteční/koncový čas měření na Hubbleově teleskopu (závisí na astronomických, precedenčních a technických omezeních)
  - *lineární omezení* řešené pomocí **Lineárního programování** (omezení = lineární nerovnice tvořící konvexní oblast) → jsou řešitelné v polynomiálním čase

Varianty omezení

- **unární** omezení zahrnuje jedinou proměnnou
  např. $SA \neq$ zelená
- **binární** omezení zahrnují dvě proměnné
  např. $SA \neq WA$
- omezení **vyššího řádu** zahrnují 3 a více proměnných
  např. kryptoaritmetické omezení na sloupce u algebrogramu
- **preferenční** omezení (soft constraints), např. 'červená je lepší než zelená'
  možno reprezentovat pomocí **ceny přiřazení** u konkrétní hodnoty a konkrétní proměnné → hledá se **optimalizované řešení** vzhledem k ceně

CLP – Constraint Logic Programming

```
% SICStus Prolog
:– use_module(library(clpfd)).    % clpq , clpr

?– X in 1..5, Y in 2..8, X+Y #= T.
    X in 1..5,
    Y in 2..8,
    T in 3..13
    Yes

?– X in 1..5, Y in 2..8, X+Y #= T, labeling ([],[X,Y,T]).
    T = 3,
    X = 1,
    Y = 2
    Yes
```

aritmetická omezení ...
→ *rel. operátory* #=, #\=, #<, #=<, #>, #>=
→ sum(Variables,RelOp,Suma)

výroková omezení ...
\# *negace*, #/\ *konjunkce*, #\/ *disjunkce*, #<=> *ekvivalence*

domain(+Variables, +Min, +Max)
?X in +Min..+Max
?X in +Range ...
A in (1..3) \/ (8..15) \/ (5..9) \/ 100.
fd_dom(?Var,?Range) *zjištění domény proměnné*
fd_set(?Var,?FDSet), ?X in_set +FDSet *příslušnost k dané konečné doméně*

CLP – Constraint Logic Programming pokrač.

```
?– X #< 4, domain([X,Y],0,5).
    X in 0..3,  Y in 0..5 ?
    Yes

?– X #< 4, indomain(X).
    Instantiation  error

?– X #> 3, X #< 6, indomain(X).
    X = 4 ? ;
    X = 5 ? ;
    No

?– X in 4..sup, X #\= 17, fd_set(X,F).
    F  = [[4|16],[18| sup]],
    X in (4..16) \/ (18..sup) ?
    Yes
```


Příklad – algebrogram

```
    S E N D
+   M O R E
-----------
  M O N E Y
```

Proměnné $\{S, E, N, D, M, O, R, Y\}$

Domény $D_i = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Omezení
- $S > 0, M > 0$
- $S \neq E \neq N \neq D \neq M \neq O \neq R \neq Y$
- $D + E = R + 10 * X_1$,
  $N + R + X_1 = E + 10 * X_2, \ldots$

```
moremoney([S,E,N,D,M,O,R,Y], Type) :– domain([S,E,N,D,M,O,R,Y],0,9),
                                      S #> 0, M #> 0,
                                      all_different ([S,E,N,D,M,O,R,Y]),
                                      sum(S,E,N,D,M,O,R,Y),
                                      labeling(Type, [S,E,N,D,M,O,R,Y]).

sum(S,E,N,D,M,O,R,Y):–                1000*S + 100*E + 10*N + D
                              +       1000*M + 100*O + 10*R + E
                       #= 10000*M + 1000*O + 100*N + 10*E + Y.

?–moremoney([S,E,N,D,M,O,R,Y],[]). % Type=[] ... Type = [ leftmost , step , up, all ]
D = 7, E = 5, M = 1, N = 6, O = 0, R = 8, S = 9, Y = 2 ?
Yes
```


Inkrementální formulace CSP

CSP je možné převést na standardní prohledávání takto:

- **stav** – přiřazení hodnot proměnným
- **počáteční stav** – prázdné přiřazení $\{\}$
- **přechodová funkce** – přiřazení hodnoty libovolné dosud nenastavené proměnné tak, aby výsledné přiřazení bylo konzistentní
- **cílová podmínka** – aktuální přiřazení je úplné
- **cena cesty** – konstantní (např. 1) pro každý krok

1. platí beze změny pro **všechny** CSP!
2. prohledávácí strom dosahuje hloubky n (počet proměnných) a řešení se nachází v této hloubce $(d = n) \Rightarrow$ je vhodné použít **prohledávání do hloubky**

Prohledávání s navracením

- ➜ přiřazení proměnným jsou **komutativní**
  tj. $[1.\ WA = \text{červená}, \quad 2.\ NT = \text{zelená}]$ je totéž jako $[1.\ NT = \text{zelená}, \quad 2.\ WA = \text{červená}]$
- ➜ stačí uvažovat pouze **přiřazení jediné proměnné** v každém kroku $\Rightarrow$ počet listů d^n
- ➜ prohledávání do hloubky pro CSP – tzv. **prohledávání s navracením** (*backtracking search*)
- ➜ prohledávání s navracením je základní neinformovaná strategie pro řešení problémů s omezujícími podmínkami
- ➜ schopný vyřešit např. problém n-dam pro $n \approx 25$

Příklad – problém N dam

```
queens(N,L,Type):− length(L,N),
                   domain(L,1,N),
                   constr_all(L),
                   labeling(Type,L).

constr_all ([]).
constr_all ([X|Xs]):− constr_between(X,Xs,1), constr_all(Xs).

constr_between(_,[],_).
constr_between(X,[Y|Ys],N):−
    no_threat(X,Y,N),
    N1 is N+1,
    constr_between(X,Ys,N1).

no_threat(X,Y,J):− X #\= Y, X+J #\= Y, X−J #\= Y.

?− queens(4, L, [ff ]).
    L  = [2,4,1,3] ?  ;
    L  = [3,1,4,2] ?  ;
    No
```

1. definice proměnných a domén
2. definice omezení
3. hledání řešení

Ovlivnění efektivity prohledávání s navracením

Obecné metody ovlivnění efektivity:

- Která proměnná dostane hodnotu v tomto kroku?
- V jakém pořadí zkoušet přiřazení hodnot konkrétní proměnné?
- Můžeme předčasně detekovat nutný neúspěch v dalších krocích?

používané strategie:

- ❑ **nejomezenější proměnná** $\longrightarrow$ vybrat proměnnou s nejméně možnými hodnotami
- ❑ **nejvíce omezující proměnná** $\longrightarrow$ vybrat proměnnou s nejvíce omezeními na zbývající proměnné
- ❑ **nejméně omezující hodnota** $\longrightarrow$ pro danou proměnnou – hodnota, která zruší nejmíň hodnot zbývajících proměnných
- ❑ **dopředná kontrola** $\longrightarrow$ udržovat seznam možných hodnot pro zbývající proměnné
- ❑ **propagace omezení** $\longrightarrow$ navíc kontrolovat možné nekonzistence mezi zbývajícími proměnnými

Ovlivnění efektivity v CLP

V Prologu (CLP) možnosti ovlivnění efektivity – **labeling(Typ, ...)**:

```
?− constraints(Vars,Cost),
   labeling([ff ,bisect,down,minimize(Cost)],Vars).
```

- ❑ **výběr proměnné** – **leftmost**, **min**, **max**, **ff**, ...
- ❑ **dělení domény** – **step**, **enum**, **bisect**, **value(Enum)**
- ❑ **prohledávání domény** – **up**, **down**
- ❑ **která řešení** – **all**, **minimize(X)**, **maximize(X)**, ...