Gödelovy věty o neúplnosti

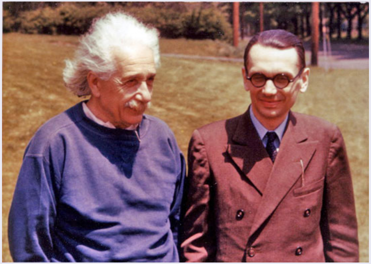
Miloš Jakubíček

PB016 Úvod do umělé inteligence
Fakulta informatiky, Masarykova univerzita

23. listopadu 2007

Kurt Gödel

Kurt Gödel



- ∗Brno, 28. 4. 1906, †Princeton, 14. 1. 1978
- 1929 Gödelova věta o úplnosti
- 1931 Gödelovy věty o neúplnosti
- 1940 odchod do exilu (USA)
- 1951 1. laureát Ceny Alberta Einsteina

Historický kontext

Principia Mathematica

Principia Mathematica je třísvazkové dílo A. N. Whiteheada a B. Russela publikované v letech 1910–1913, jehož cílem bylo zachytit celou aritmetiku (teorii čísel) jako formální systém skládající se z *axiomů* a *inferenčních pravidel*:

$$\text{axiomy} + \text{inferenční pravidla} = \text{teorémy}$$

Požadavky na takový systém:

- *bezesporný*

Historický kontext

Principia Mathematica

Principia Mathematica je třísvazkové dílo A. N. Whiteheada a B. Russela publikované v letech 1910–1913, jehož cílem bylo zachytit celou aritmetiku (teorii čísel) jako formální systém skládající se z *axiomů* a *inferenčních pravidel*:

$$\text{axiomy} + \text{inferenční pravidla} = \text{teorémy}$$

Požadavky na takový systém:

- *bezesporný*
- *úplný*

Bezespornost a úplnost

Definice (bezespornost)

Formální systém je bezesporný (konsistentní) právě tehdy, když v něm nelze dokázat zároveň formuli X i $\neg X$.

Bezespornost a úplnost

Definice (bezespornost)

Formální systém je bezesporný (konsistentní) právě tehdy, když v něm nelze dokázat zároveň formuli X i $\neg X$.

Definice (úplnost)

Formální systém je úplný právě tehdy, jestliže všechna pravdivá tvrzení jsou v něm dokazatelná.

Richardův paradox I

Richardův paradox

Mějme lexikograficky uspořádaná tvrzení o číslech:

1. „být sudé“
2. „být liché“
3. „být prvočíslo“
4. „být mocninou dvou“

. . .

Definice („být Richardovské“)

Přirozené číslo n nazveme *Richardovské* právě tehdy, když n nemá vlastnost, kterou formuluje tvrzení na místě n v daném uspořádání.

Richardův paradox II

Richardovské číslo

Definice Richardovského čísla je korektně formulovaným tvrzení o číslech $\Rightarrow$ je v našem uspořádání a má nějaké pořadové číslo x.

Je x Richardovské?

- Pokud x je Richardovské, pak nemá vlastnost, kterou formuluje tvrzení na místě x, tedy nemá vlastnost být Richardovským, a tedy není Richardovské.
- Pokud x není Richardovské, pak má vlastnost, kterou formuluje tvrzení na místě x, tedy má vlastnost být Richardovským, a tedy je Richardovské.

Výsledek

x je Richardovské $\iff$ x není Richardovské. Spor – anebo ne?

Jazyk vs. metajazyk

Je Richardův paradox skutečně paradoxem?

Spor v Richardově paradoxu je založený na smíšení matematických tvrzení ($1 + 1 = 2$) a tvrzení *o* matematice, tj. tvrzení metamatematických („$1 + 1 = 2$“ je krásná rovnice).

Jazyk vs. metajazyk

Je Richardův paradox skutečně paradoxem?

Spor v Richardově paradoxu je založený na smíšení matematických tvrzení ($1+1=2$) a tvrzení *o* matematice, tj. tvrzení metamatematických („$1+1=2$“ je krásná rovnice).

⇒Pokud takové matení pojmů vyloučíme, nemůže Richardův paradox nastat. Gödel se však podobným zmatkům vyhnul – jak?

Gödelovo očíslování

Formulace *v* číslech *o* číslech

Jak mluvit *o* číslech a přitom nemluvit *mimo* čísla? Gödelův trik spočívá v tzv. Gödelově očíslování – přiřazení jedinečného Gödelova čísla každému tvrzení tak, že lze zpětně dekódovat přesný tvar formule:

- Každý symbol dostane po řadě jedinečné číslo $1, 2, 3, \ldots$.

Gödelovo očíslování

Formulace *v* číslech *o* číslech

Jak mluvit *o* číslech a přitom nemluvit *mimo* čísla? Gödelův trik spočívá v tzv. Gödelově očíslování – přiřazení jedinečného Gödelova čísla každému tvrzení tak, že lze zpětně dekódovat přesný tvar formule:

- Každý symbol dostane po řadě jedinečné číslo $1, 2, 3, \ldots$.
- Číslo formule je dáno jako součin prvočísel přidělených po řadě symbolům, které se ve formuli vyskytují, umocněných na číslo daného symbolu.

Gödelovo očíslování

Formulace *v* číslech *o* číslech

Jak mluvit *o* číslech a přitom nemluvit *mimo* čísla? Gödelův trik spočívá v tzv. Gödelově očíslování – přiřazení jedinečného Gödelova čísla každému tvrzení tak, že lze zpětně dekódovat přesný tvar formule:

- Každý symbol dostane po řadě jedinečné číslo $1, 2, 3, \ldots$.
- Číslo formule je dáno jako součin prvočísel přidělených po řadě symbolům, které se ve formuli vyskytují, umocněných na číslo daného symbolu.

Gödelovo očíslování

Formulace *v* číslech *o* číslech

Jak mluvit *o* číslech a přitom nemluvit *mimo* čísla? Gödelův trik spočívá v tzv. Gödelově očíslování – přiřazení jedinečného Gödelova čísla každému tvrzení tak, že lze zpětně dekódovat přesný tvar formule:

- Každý symbol dostane po řadě jedinečné číslo $1, 2, 3, \ldots$.
- Číslo formule je dáno jako součin prvočísel přidělených po řadě symbolům, které se ve formuli vyskytují, umocněných na číslo daného symbolu.

Příklad

Mějme formuli $(x \vee y) \Rightarrow z$ a symboly v ní obsažené očíslované po řadě $1 \ldots 7$. Pak této formuli odpovídá Gödelovo číslo
$2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^4 \cdot 11^5 \cdot 13^6 \cdot 17^7 = 1723219765760312626547490750$.

1. Gödelova věta o neúplnosti I

1. Gödelova věta o neúplnosti

Každý formální systém zahrnující alespoň aritmetiku přirozených čísel buď není bezesporný, nebo není úplný.

Relace *dem*(x, y)

Nechť Y je teorém nějakého formálního systému a X posloupnost odvození Y v tomto systému z jeho axiomů (X je důkaz Y).

X a Y jsou korektně utvořená tvrzení $\Rightarrow$ lze najít jejich Gödelova čísla x a y. Mezi x a y existuje aritmetická relace, kterou označíme $dem(x, y)$.

Výraz $(\exists x)dem(x, y) \approx x$ je dokazatelné tvrzení.

1. Gödelova věta o neúplnosti II

Formule G

Gödel ukázal, že lze najít formuli G s Gödelovým číslem g, která tvrdí $(\nexists x)dem(x, g)$ ($\approx$ formule s Gödelovým číslem g není dokazatelná). Je-li tento systém úplný, pak pro G nutně platí, že:

- G je dokazatelná $\Rightarrow$ platí G $\Rightarrow$ G není dokazatelná.
- G není dokazatelná $\Rightarrow$ platí $\neg G$ $\Rightarrow$ G je dokazatelná.

$$G \iff \neg G$$

$\Rightarrow$ Formální systém není bezesporný.

1. Gödelova věta o neúplnosti III

Bezespornost vs. úplnost

Aby byl systém bezesporný, nemůže obsahovat ani G, ani $\neg G \Rightarrow$ nebude úplný.

$\Rightarrow$ BEZESPORNOST $\not\Leftrightarrow$ ÚPLNOST.

2. Gödelova věta o neúplnosti I

2. Gödelova věta o neúplnosti

Žádný formální systém zahrnující alespoň aritmetiku přirozených čísel nemůže dokázat vlastní bezespornost.

Formule $F \Rightarrow G$

Aby byl systém bezesporný, je nutně neúplný, tedy existuje nedokazatelné tvrzení: $(\exists b)(\nexists a) dem(a, b)$. Pak existuje formule, která není dokazatelná – takovou ovšem máme – G! Nutně tedy platí $(\exists b)(\nexists a) dem(a, b) \Rightarrow (\nexists x) dem(x, g)$, nebo-li $F \Rightarrow G$.

2. Gödelova věta o neúplnosti II

Nedokazatelnost bezespornosti

Pokud ovšem platí $F \Rightarrow G$, pak je-li systém bezesporný, obsahuje G, a tedy i $\neg G$ (podle 1. Gödelovy věty o neúplnosti) a bezesporným není!

Co plyne z nekonsistentního systému

Výrok $p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$ je tautologie. Dosazením G za p lze dokázat libovolné tvrzení q!

Důsledky

- Žádný (dostatečně silný) formální systém nemůže být zároveň bezesporný a úplný.

Důsledky

- Žádný (dostatečně silný) formální systém nemůže být zároveň bezesporný a úplný.
- Bezespornost bezesporného systému nelze uvnitř tohoto systému dokázat.

Důsledky

- Žádný (dostatečně silný) formální systém nemůže být zároveň bezesporný a úplný.
- Bezespornost bezesporného systému nelze uvnitř tohoto systému dokázat.
- Z nekonsistentního systému plyne úplně cokoli.

Důsledky

- Žádný (dostatečně silný) formální systém nemůže být zároveň bezesporný a úplný.
- Bezespornost bezesporného systému nelze uvnitř tohoto systému dokázat.
- Z nekonsistentního systému plyne úplně cokoli.
- Důsledky – nejen negativní – pro logiku, matematiku, informatiku, filosofii, . . .

Motto

Je to příležitost nikoli pro sklíčenost, nýbrž pro obnovené ocenění sil tvůrčího rozumu.

E. Nagel & J. R. Newman

Je pozoruhodné, jak velmi blízko mají k sobě v dnešní době logika a filosofie, psychologie a umělá inteligence, informatika a matematika. Inu, zdá se, že žijeme ve velmi vzrušující době!

Raymond Smullyan